物理 (1)

問 1. 剛体の慣性モーメント I は回転軸からの距離が s の質量要素を dm としたとき、

$$I = \int s^2 dm$$

と書ける。

(a) 図 1 のような、密度が一様な剛体球 (質量 M、半径 a) の、中心を通る回転軸周りの慣性モーメント I を求めよ。
(b) この剛体球が回転軸周りに角速度 ω で回転している時の、回転運動のエネルギーを求めよ。

問 2. 問 1. の剛体球 (A とする) が、図 2 のような内面の粗い固定された中空円筒 (B とする、半径 b、$b > a$) の中で滑らずに転がる運動を考える。ここで、剛体球 A は中空円筒 B の中心軸に垂直な平面方向にのみ運動するとする。重力加速度を g、剛体球 A の重心位置の鉛直下方とのなす角を θ、剛体球 A の回転角速度を ω、剛体球 A にかかる摩擦力を F としたとき、以下の問いに答えよ。ただし、**(a)** から **(e)** までは剛体球 A の慣性モーメントを I とせよ。

(a) 剛体球 A の重心の運動に関する運動方程式を書け。
(b) 一般に剛体の回転運動の運動方程式は、角運動量 $\boldsymbol{L}$、力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を使って

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

と書ける。剛体球 A の角運動量と、剛体球 A にかかる力のモーメントを与えられた変数で表し、ω の満たす微分方程式を求めよ。
(c) 剛体球 A が滑らないという条件から θ と ω の関係を求め、θ の満たす微分方程式を求めよ。
(d) この系のラグランジアンを書け。
(e) オイラー・ラグランジュ方程式を用いて、θ の満たす微分方程式を求めよ。
(f) θ が小さいとき、剛体球 A の重心の運動が単振動となることを示せ。また、問 1.(a) の結果を用いて、その周期を求めよ。

***次のページにも問題があるので注意すること**

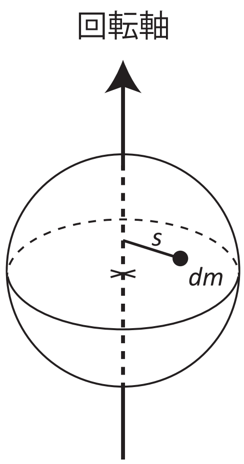

図 1

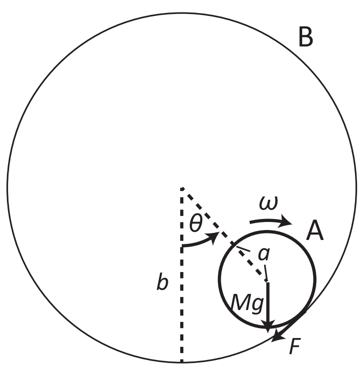

図 2

問 3. 図 2 で、滑らずに転がる剛体 A の形状が異なる場合を考える。(1) 半径 a の球体 (問 2. の場合)、(2) 半径 a の円柱、(3) 外半径 a、内半径 $0.9a$ の中空円筒、の 3 つの場合で、θ が小さいときに重心が行う単振動の周期がもっとも長くなるのはどの場合かを答え、その理由を説明せよ。

ただし、(1)-(3) いずれの場合も、転がる剛体は密度が一定の材質でできているとし、中空円筒 B の中心軸に垂直な平面方向にのみ運動するとする。また、(2) の円柱および (3) の中空円筒の中心軸と、固定された中空円筒 B の中心軸は平行であるとする。

物理（2）

問１．N 個の同種粒子からなる体積 V、温度 T の理想気体を考える。気体の圧力 P と内部エネルギー U は

$$P = \frac{N}{V} k_B T, \quad U = \frac{3}{2} N k_B T$$

で与えられるものとする。ここで、k_B はボルツマン定数である。N の値は固定されている。

(a) 気体粒子一個あたりの定積比熱 c_V と定圧比熱 c_P を求めよ。

(b) 一般に $c_P > c_V$ となるが、その物理的理由を述べよ。

(c) 可逆過程におけるエネルギー保存則を使って気体粒子一個あたりのエントロピー s を求めよ。

(d) 可逆的断熱過程における P と V の間の関係を求めよ。

問２．温度 T の熱浴と熱的に接している一個の一次元調和振動子を考える。調和振動子を量子力学的に取り扱うとき、振動子のエネルギーレベル ϵ_n は

$$\epsilon_n = n\hbar\omega, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

で与えられるものとする。ここで、ω は振動子の角振動数で定数、$\hbar = h/2\pi$ で、h はプランク定数である。

(a) 分配関数 Z を求めよ。

(b) 振動子のエネルギーのアンサンブル平均 u を求めよ。また、極限 $\hbar\omega/k_BT \ll 1$ と $\hbar\omega/k_BT \gg 1$ における u を求めよ。

(c) 振動子の比熱 c_V を求めよ。また、極限 $\hbar\omega/k_BT \ll 1$ と $\hbar\omega/k_BT \gg 1$ における c_V を求めよ。

(d) 振動子のエントロピー s を $s = \int_0^u du/T$ と積分することで求め、$\hbar\omega/k_BT$ の関数として表せ。また、極限 $\hbar\omega/k_BT \ll 1$ と $\hbar\omega/k_BT \gg 1$ における s を求めよ。

物理（３）　以下では MKSA 単位系を用いる。

問１．半径 R の十分長い円筒状の陽極と、その中心軸においた直線状の陰極（これを z 軸に取る）とを考える。これらの両極間に電圧 V を加えた。また両極間には z 軸の正方向に磁束密度 $B(>0)$ の一様磁場が存在する。いま、陰極から初速度 0 で運動を開始した電子の運動を考える。ただし、電子の質量を m、電荷を $-e$ とする。また、z 軸に垂直な 2 次元面内での運動に対して、速度 $\mathbf{v}$ および加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ はこの面内での動径座標 r、方位角座標 θ を用いて、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\
\dot{\mathbf{v}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}
$$

と書けることを用いてもよい。ここで $\mathbf{e}_r$、$\mathbf{e}_\theta$ はそれぞれ動径 r、方位角 θ 方向の単位ベクトルである。

(a) 電子の運動方程式の r および θ 成分をそれぞれ書け。ただし両極間の電位分布を $\phi(r)$ とせよ。

(b) 運動方程式の θ 成分を用いて、電子の運動において $\dot{\theta}$ が時間的に一定な値 $eB/(2m)$ となることを示せ。

(c) 運動方程式から電子の運動エネルギーと静電ポテンシャルエネルギーの和が保存することを示せ。

(d) 電子が陽極に到達するためには、磁束密度 B がある値以下でなければならないことを示し、その値を求めよ。

※次のページにも問題があるので注意すること

問２．z 軸方向を向いた、一様な磁束密度 $\mathbf{B}_0$ の磁場中に、半径 a の磁性体球 (透磁率 μ) をその中心が原点と一致するように置いた（図１）。球の外部は真空とし、その透磁率を μ_0 とする。

(a) 球の表面の内外における、表面に垂直な磁束密度の成分をそれぞれ $B_\perp^{\rm in}$、$B_\perp^{\rm ex}$、平行な成分をそれぞれ $B_\parallel^{\rm in}$、$B_\parallel^{\rm ex}$ とする。これらの間に成り立つ関係を答えよ。

(b) 球の内部と外部における磁束密度の分布はそれぞれ、

$$\mathbf{B}^{\rm in} = \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}^{\rm ex} = \mathbf{B}_0 - \frac{1}{4\pi}\nabla\left(\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)$$

と与えられる。ここで、$\mathbf{B}_1$、$\mathbf{M}$ は z 方向を向いた定ベクトルである。z 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_z$ を用いて、$\mathbf{B}_1 = B_1\mathbf{e}_z$、$\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$ としたとき、B_1、M を求めよ。

(c) 中心が z 軸上に位置し、z 軸と垂直な面上にある円形のループ C を考える。原点から C 上の点までの距離を b とするとき、C を貫く磁束は磁性体球がない場合の何倍であるか答えよ。

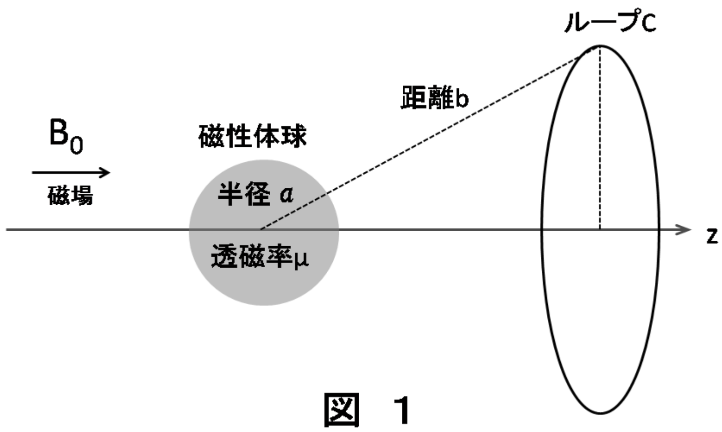

図　1

物理（４）

状態関数 $\psi(x)$ は１次元シュレーディンガー方程式のエネルギー固有関数で以下の方程式を満たす。

$$H\psi = E\psi, \qquad H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1}$$

m は粒子の質量、H はハミルトニアン、$V(x)$ はポテンシャル、E はエネルギー固有値である。運動量演算子 p は

$$p \quad = \quad -i\hbar \frac{d}{dx}$$

で与えらる。ここで h はプランク定数で $\hbar = h/2\pi$ である。

問 1.

(a) 以下の運動量と位置の演算子の交換関係を示せ。

$$[x, p] \quad \equiv \quad xp - px = i\hbar$$

(b) 以下のハミルトニアンと位置の演算子の交換関係を示せ。

$$[H, x] \quad = \quad -i\hbar \frac{p}{m}$$

以下では、$V(x)$ が次の井戸型ポテンシャルで与えられるとする。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq a) \\ V_0 & (a < x) \end{cases}$$

問 2.　V_0 が有限な正の値を持つとき、$0 < E < V_0$ の場合のシュレーディンガー方程式 (1) の一般解を三つの領域 $x < 0$、$0 \leq x \leq a$、 $a < x$ に対してそれぞれ求めよ。

問 3.　以下では、$V_0 \to \infty$ とする。

(a) 領域 $0 \leq x \leq a$ に束縛される状態を表す規格化されたエネルギー固有状態 $\psi_n(x)$ を求めよ。また、それぞれに対応するエネルギー固有値 E_n も求めよ。

(b) 異なる固有値に対する固有関数が直交することを示せ。

(c) 任意の規格化されたエネルギー固有状態 $\psi_k(x)$ について以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\sum_n (E_n - E_k) \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x)\, x\, \psi_k(x) \right|^2 \quad = \quad \frac{\hbar^2}{2m}$$

和は全ての固有状態に対してとり、ψ_n^* は ψ_n の複素共役である。ここで規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ は以下の完全性の関係式を満たす。

$$\sum_n \psi_n^*(x')\psi_n(x) \quad = \delta(x - x')$$

和は全ての固有状態に対してとり、$\delta(x - x')$ はディラックのデルタ関数である。