物理（1）

問. 下図のように、質量m_1の質点 A と質量m_2の質点 B が、長さlの質量の無視できる細い剛体棒でつながれている。質点 A は水平なx軸上のみを滑らかに運動でき、質点 B はxy平面内で運動するものとする。鉛直下方に一定の重力加速度gが作用しているとする。この系の状態を、下図のように質点 A のx軸の座標x、および剛体棒が鉛直下方となす角度θ（ラジアン）で表すことにする。時間をtとする。以下の問に答えよ。

(a) 質点 A および質点 B それぞれについて、x軸方向とy軸方向の速度を、xとθおよびそれらの時間微分$\dot{x}$と$\dot{\theta}$のうち必要なものを用いて表せ。

(b) ラグランジアンLを書け。

(c) xとθに対するラグランジュの運動方程式はどのようになるか。

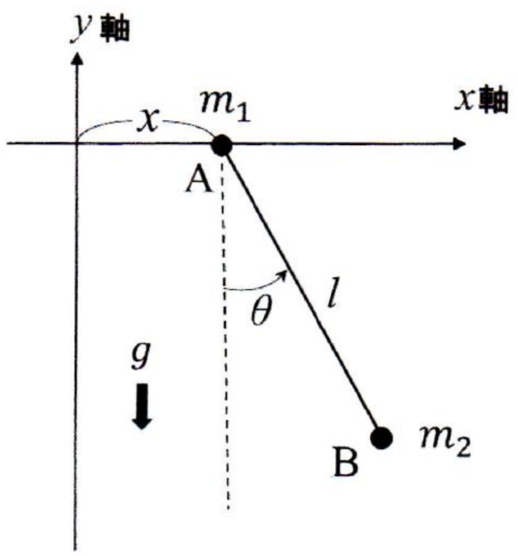
(d) 循環座標を書け。また循環座標の存在によって生じる保存量をx、$\dot{x}$、θ、$\dot{\theta}$のうち必要なものを用いて表せ。

以下、$|\theta| \ll 1$とし、2 次以上の微小量は無視せよ。

(e) 変数xを消去してθについての微分方程式を導け。

(f) $m_1 \gg m_2$であるとき、質点 A および質点 B はそれぞれどのような運動をするか説明せよ。

(g) m_1とm_2について(f)の条件がみたされない一般の場合に、初期条件を$t = 0$で$x = 0$、$\dot{x} = v_0$、$\theta = \theta_0$、$\dot{\theta} = 0$として、運動方程式の解を求めよ（$v_0 > 0$、$0 < \theta_0 \ll 1$とする）。また、系の重心のx座標をx_Gとするとき、$x - x_G$およびθの時間変化を図示せよ。



物 理（2）

問 1. 外界との間に物質の出入りがない閉じた系について、以下の問に答えよ。

(a) 系の微小な変化過程（無限小過程）において、内部エネルギーの変化 dU を、外界から系に与えられた熱 $d'Q$ および外界から系に与えられた仕事 $d'W$ を用いて表せ。

(b) 熱力学第二法則の一般的な表現として、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{d'Q}{T_{\mathrm{ext}}} \leq dS$$

ただし、T_{ext} は外界の温度、S は系のエントロピーであり、等号は可逆過程のときに成り立つ。この不等式を用いて一般の断熱変化は S を増大させる向きに進み、平衡状態で S が最大となることを説明せよ。

問 2. 定積熱容量が $C_{V,\mathrm{A}}$ および $C_{V,\mathrm{B}}$ で、初期状態で温度 $T_{0,\mathrm{A}}$ および $T_{0,\mathrm{B}}$ の 2 つの系 A と系 B を接触させる。ただし、この系全体は孤立系であり、定積熱容量は温度によらない定数とする。系 A と系 B の体積はいずれも変化せず、両者の間では熱のやりとりのみ行う場合、以下の問に答えよ。

(a) 平衡状態に達したときの系 A と系 B の温度が等しいことを、系全体のエントロピー S が極値をとることから示せ。

(b) 平衡状態に達したときの温度を求めよ。

問 3. 互いに区別のつく N 個の独立な粒子からなる系がある。それぞれの粒子は $-\epsilon$ または $+\epsilon$ の 2 つのエネルギー状態のいずれかをとるものとする。ただし、$\epsilon > 0$ である。この系の全エネルギーを E、エントロピーを S、温度を T とするとき、以下の問に答えよ。なお、ボルツマン定数は k_B とする。

(a) $-\epsilon$ のエネルギー状態にある粒子数を N_- 個、$+\epsilon$ のエネルギー状態にある粒子数を N_+ 個とするとき、系のエントロピーが、

$$S = -k_B \left\{ N_- \log_e \left(\frac{N_-}{N} \right) + N_+ \log_e \left(\frac{N_+}{N} \right) \right\}$$

となることを示せ。ただし、N、N_-、および N_+ は十分大きく、$n! \approx (n/e)^n$ (e は自然対数の底、n は十分大きな自然数) の近似を適用してよい。

(b) この系の自由エネルギー $F(\equiv E - TS)$ を、T、N、ϵ、k_B を用いて表せ。

(c) この系の全エネルギー E は、

$$E = -N\epsilon \frac{e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}$$

となることを示せ。

(d) この系の比熱が、高温極限と低温極限のいずれの場合も 0 に漸近することを示せ。また、それぞれの場合において、その物理的理由を考察せよ。

物 理（３） 本問では MKSA 単位系を用いる。

問 1. 誘電率 ε、質量密度 ρ_{d} の誘電体からなる液体上に、半径 a で、液体よりも小さな質量密度 ρ_{c} の導体球に電荷 Q を与えて静かに置いたところ、球の中心が誘電体表面と一致する高さまで沈んで静止した（図 1 ）。液体上方の空気は希薄で質量密度は無視でき、誘電率は真空の誘電率 ε_0 であるとする。

(a) 液体と空気の境界面において、その上下の電場 $\mathbf{E}$ は面に平行である。境界面上の空気側と液体側の電場の大きさをそれぞれ $E^{(0)}$、$E^{(1)}$ としたとき、これらの間に成り立つ関係を求めよ。

(b) 導体球の表面における面電荷密度の分布を求めよ。

(c) 導体球全体が鉛直方向に受ける静電気力を求めよ。

(d) 静電気力と重力、浮力を考慮した力の釣り合いから、導体球の質量密度 ρ_{c} を求めよ。ここで重力加速度を g とする。
なおマクスウェル応力テンソルはデカルト座標系 (x, y, z) を用いて

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x D_x - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{D} = (D_x, D_y, D_z)$ はそれぞれ電場ベクトルと電束密度ベクトルである。

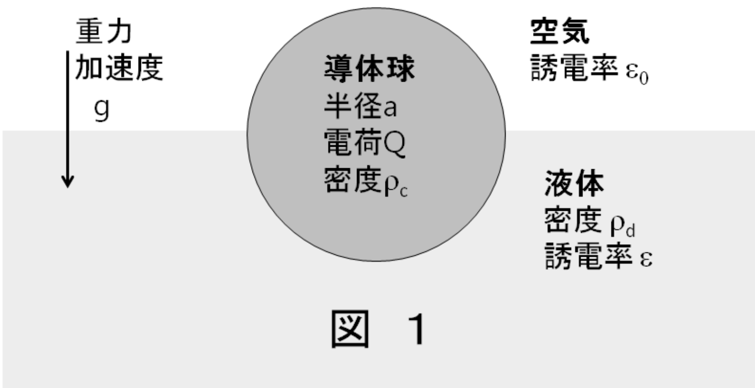


図　1

※次のページにも問題があるので注意すること

問 2. 電荷 q を持った小さい粒子が一定の速度 $\mathbf{v}$ で光速と比べて十分ゆっくりと運動している（図２）。粒子の運動方向上に中心を持ち、それに垂直で、空間的に固定された円形のループ C を考える。いまループ上の一点を P とする。ある時刻に、点 P の粒子からの距離が r、運動方向からの角度が θ であった。

(a) このとき、ループ C を横切る電束 Φ_e を求めよ。ただし電束は電束密度ベクトル $\mathbf{D}$ を、ループ C によって囲まれる任意の曲面 S 上で面積分して、$\Phi_\mathrm{e} = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ と与えられる。

(b) 点 P での磁束密度ベクトル $\mathbf{B}$ の大きさと向きを求めよ。

(c) 電荷粒子外の全空間で積分した磁場のエネルギーは粒子の運動エネルギーの何倍であるか答えよ。ただし、粒子外の空間において磁束密度ベクトルは上問 (b) の結果を用いて与えられるものとし、そこでの透磁率を μ_0 とする。また粒子は微小な半径 a の球とし、その質量を m とする。

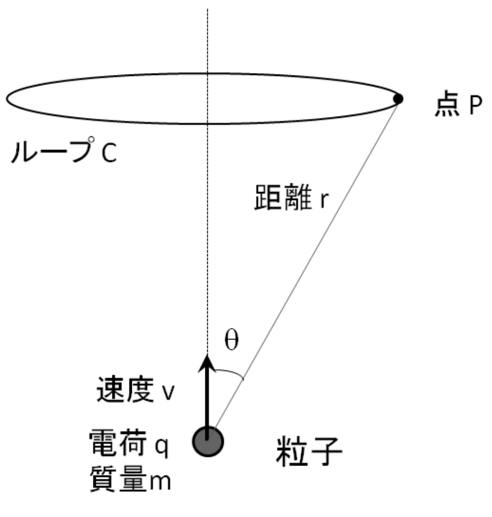


図 2

物 理（4）

質量 m、固有角振動数 ω をもつ 1 次元調和振動子の量子力学的運動について考える。

問 1. 1 次元調和振動子のハミルトニアン H は、座標 x と運動量演算子 $p = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ を用いて次のように書ける。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

このとき，エネルギー固有値 E_n は $\hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ と与えられる。n は 0 または正の整数であり、$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。また、固有値 E_n の固有状態を ψ_n で表す。それぞれの固有状態は $\displaystyle\int |\psi_n|^2 dx = 1$ のように規格化され、x の実関数であるとする。さらに、下降演算子 a、上昇演算子 $a^\dagger$、数演算子 N はそれぞれ以下のように定義される。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \qquad N = a^\dagger a. \tag{2}$$

(a) 関係式 $H = \hbar\omega\left(N + \dfrac{1}{2}\right)$ を示せ。

(b) 交換関係 $[a, N] \equiv aN - Na = a$ および $[a^\dagger, N] = -a^\dagger$ を示せ。

(c) ψ_n は演算子 N の固有状態でもあり、固有値は n である。2 つ状態 $a\psi_n$ と $a^\dagger\psi_n$ も N の固有状態で固有値はそれぞれ $n-1$ と $n+1$ であることを示せ。ただし、状態 $a\psi_n$ に対しては $n \geq 1$ とする。

(d) 一般に演算子 f のエネルギー表示での行列要素は 2 つのエネルギー固有状態 ψ_m と ψ_n を用いて

$$\langle m|f|n\rangle = \int \psi_m^* f \psi_n dx \tag{3}$$

と表される。このとき、演算子 a と $a^\dagger$ のエネルギー表示での行列要素 $\langle m|a|n\rangle$、$\langle m|a^\dagger|n\rangle$ において

$$\langle n-1|a|n\rangle = \langle n|a^\dagger|n-1\rangle = \pm\sqrt{n} \qquad (n \geq 1) \tag{4}$$

であり、かつ、上記以外の行列要素は 0 であることを示せ。必要ならば、a と $a^\dagger$ が互いにエルミート共役であることを用いてもよい。

(e) 各固有状態の x^2 の期待値 $\langle n|x^2|n\rangle$ を求めよ。さらに、$\langle n|p^2|n\rangle$ も求めて、不等式 $\langle n|x^2|n\rangle^{1/2}\langle n|p^2|n\rangle^{1/2} \geq \hbar/2$ が成り立つことを示せ。

問 2. 次に、問 1 の調和振動子にポテンシャル $V(x) = \alpha x^3 + \beta x^4$ を追加した非調和振動子を考える。実の定係数 α と β の大きさが十分に小さく、ポテンシャル V を摂動とみなすことができるものとする。このとき、V によるエネルギー E_n の変化は α と β について 1 次の精度で $\langle n|V|n\rangle$ と与えられる。この行列要素を計算し、1 次精度のエネルギー変化を求めよ。

天文学専攻　物理学 2

物理 (3) 問題訂正

問 2 (b) 問題文に追加

「ただし、点 P での透磁率を μ_0 とする。」