物 理（1）

問 1. 座標 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ で記述される系を考える。このとき、保存力はポテンシャルから導かれる力として導入される。ラグランジュ関数 $L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)$ に含めることができない保存力以外の力 Q_i $(i = 1, \cdots, n)$ も作用しているとき、ハミルトンの原理は

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i) dt = 0$$

と表される。ただし、t は時間で、t_1 と t_2 は定まった時刻である。ここで、δL は各座標をそれぞれ δq_i $(i = 1, \cdots, n)$ だけ微小変化させたときのラグランジュ関数の変化を表す。また、$\dot{q}_i \equiv \dfrac{dq_i}{dt}$ $(i = 1, \cdots, n)$ である。端点固定の境界条件 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ がみたされているとして、オイラー-ラグランジュの方程式を求めよ。

問 2. 図のように、質量 m の 2 個の質点がばね定数 k の 2 本のばねで連結され、なめらかで水平な床の上に置かれている。ばね 1 の左端は壁に固定されており、2 個の質点は x 方向にのみ運動すると仮定する。質点 1 と質点 2 に対して、それぞれ釣り合いの位置を基準とした変位を x_1 および x_2 とする。以下の問に答えよ。

(a) 外力が作用していないとき、ラグランジュ関数を書け。

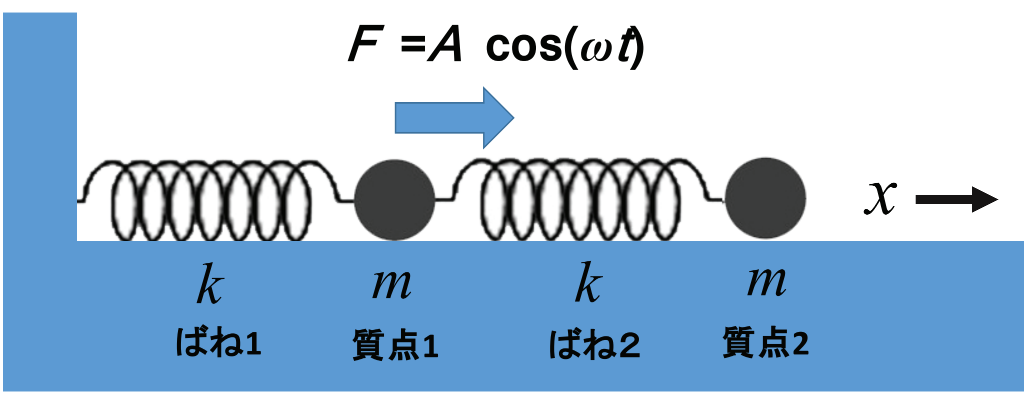
(b) 質点 1 と質点 2 の運動方程式を求めよ。

(c) 基準振動数を求め、それぞれの基準振動に対して、質点 1 と質点 2 の振幅の比と位相差を求めよ。ただし、振幅は正であるとする。

(d) 質点 1 にのみ水平方向の外力 $F = A\cos(\omega t)$ が作用しているとする。ただし、A と ω は正の定数である。このとき、$x_1 = B_1 \cos(\omega t)$、$x_2 = B_2 \cos(\omega t)$ の形の特殊解を求めよ。ただし、B_1 と B_2 は定数である。

(e) 共振が起きるときの ω^2 の値を求めよ。

(f) $\omega = \sqrt{k/m}$ であるとき、(d) で求めた解はどのようになるか。また、質点 1 に作用しているばね 1 の力 F_1 と、ばね 2 の力 F_2 を求め、時間の関数として簡単に図示せよ。



図

物 理（2）

内部エネルギー U、体積 V、粒子数 N の 1 成分気体からなり、平衡状態にある系を考える。この系の熱力学的情報は、系のエントロピー S を、U、V、および N の関数として記述した式 $S = S(U, V, N)$ によって完全に決定できる。ここで、$S(U, V, N)$ は連続で微分可能な一価関数である。以下の問に答えよ。

問 1. 系の温度 T、圧力 P、および、化学ポテンシャル μ に関して、3 つの状態方程式 $1/T = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}$、$P/T = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N}$、および $\mu/T = -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}$ が得られることを示せ。

問 2. $S(U, V, N)$ は 1 次の同次関数である。すなわち、任意の正の実数 λ に対して $S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N)$ が成り立つ。このとき、$U = TS - PV + \mu N$ となることを示せ。

問 3. **(a)** 単原子理想気体の S は、U、V、および N の関数として、

$$S = Nk_B s_0 + Nk_B \ln\left[U^{\frac{3}{2}} V N^{-\frac{5}{2}}\right]$$

で与えられる。ただし、s_0 は定数、k_B はボルツマン定数である。粒子数 N が一定のとき、2 つの独立な状態方程式を導け。

(b) 実験事実から、温度 T の熱平衡状態にある体積 V の光子気体の熱力学は、粒子数 N を含まない 2 つの独立な状態方程式 $U = \frac{4\sigma}{c} V T^4$ および $P = \frac{U}{3V}$ のみにより完全に記述される。ただし、σ はステファン-ボルツマン定数、c は光速である。したがって、粒子数 N を T および V と独立に指定できない。その理由を光子の化学ポテンシャルが 0 であることから簡潔に説明せよ。また、光子気体の S を U および V の関数として書け。

問 4. **(a)** 問 3(a) の単原子理想気体について、ヘルムホルツの自由エネルギー F を T、V、および N の関数として書け。

(b) 問 3(b) の光子気体について、ヘルムホルツの自由エネルギー F を T および V の関数として書け。

問 5. 互いに区別できない質量 m の粒子からなる古典的な単原子理想気体の統計力学について考える。1 粒子の分配関数 $Z(T, V, 1)$ は、粒子の運動量を (p_x, p_y, p_z) として、

$$Z(T, V, 1) = \frac{V}{h^3} \int\!\!\int\!\!\int \exp\left[-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T}\right] dp_x\, dp_y\, dp_z$$

により計算できる。ここで、h はプランク定数である。

(a) 分配関数を用いて N 粒子に対するヘルムホルツの自由エネルギー F を求め、T、V、および N の関数として書け。必要であれば、十分大きな自然数 N についての Stirling の近似式 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いてよい。また、$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

(b) 問 5(a) の結果を用いて S を求め、U、V、および N の関数として書け。また、問 3(a) の定数 s_0 を決定せよ。

物 理（3）

問 1. **(a)** 図 1 のように $z = z'$ 平面上 (z' は定数) で z 軸を中心とする半径 a の円状に電流 I が流れている。このとき、z 軸上の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は次のようになることを示せ。

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{\{(z - z')^2 + a^2\}^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{e}_z$$

ここで、μ_0 は真空の透磁率、$\boldsymbol{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである。

(b) (a) で $z' = 0$ としたとき、原点から十分遠方での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \right)$$

ただし、$\boldsymbol{r}$ は原点に対する位置ベクトル、$\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_z$ で与えられる定ベクトル、$r = |\boldsymbol{r}|$ である。(a) の結果との比較から定数 M を求めよ。

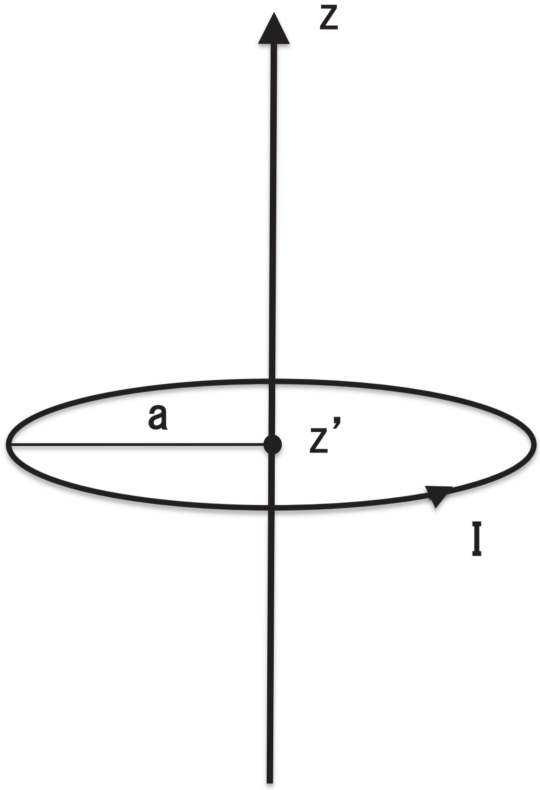


図 1

※次のページにも問題があるので注意すること

問 2. **(a)** 図 2 のような中心軸が z 軸上にある半径 a、単位長さあたりの巻き数 n の無限に長いソレノイドコイルを考える。このソレノイドコイルに電流 I を流したとき、原点での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

(b) (a) のソレノイドコイルの内側と外側の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

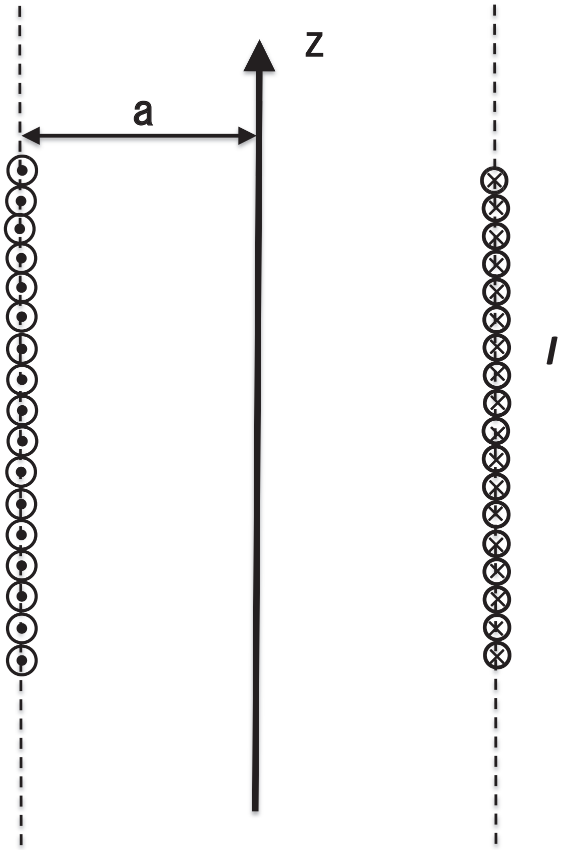


図 2

問 3. 原点を中心とする半径 a、質量 M の球に電荷 Q が一様に分布している。電荷は球に固定されていて、球と共に運動するものとする。この帯電球に時刻 $t = 0$ から磁束密度 $\boldsymbol{B} = B(t)\,\boldsymbol{e}_z$ の一様な磁場を加えたところ、z 軸を軸として、回転角速度 $\omega(t)$ で回転を始めた。ただし、$t = 0$ で $B(0) = 0$、$\omega(0) = 0$ とする。また、磁場は帯電球の存在によって変化しないものとする。次の問に答えよ。

(a) $t \geq 0$ で $\dfrac{dB}{dt} > 0$ のとき、帯電球の回転の向きを物理的な理由とともに述べよ。

(b) 帯電球内に発生する誘導電場 $\boldsymbol{E}$ の ϕ 成分を求めよ。ここで、(R, ϕ, z) は z 軸を軸とする円筒座標である。

(c) 誘導電場 $\boldsymbol{E}$ が帯電球に与える力のモーメントは $\boldsymbol{N} = \displaystyle\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} dV$ で与えられる。ここで、$\boldsymbol{F} dV$ は帯電球の微小体積要素 dV に作用する力である。系の対称性から $\boldsymbol{N}$ の R 成分と ϕ 成分はゼロとなる。$\boldsymbol{N}$ の z 成分 N_z を求めよ。

(d) $\omega(t)$ を $B(t)$ を用いて表せ。ただし、帯電球の慣性モーメント I_m は $I_m = \dfrac{2}{5} Ma^2$ とせよ。

物 理（４）

$x<0$ から x 軸の正の方向へ定常的に入射する粒子が、時間変動のない 1 次元ポテンシャル $V(x)$ の中を運動する。$x<0$ で $V(x)=0$ であり、粒子の質量とエネルギーはそれぞれ m と $E\ (>0)$ であるとする。この粒子の運動を 1 次元シュレディンガー方程式を用いて調べる。$x<0$ における粒子の波動関数 $\psi(x)$ は

$$\psi(x)=\exp(ik_0x)+B\exp(-ik_0x) \tag{1}$$

で与えられる。ただし、k_0 は正の実数、B は一般に複素数である。以下の問に答えよ。

問 1. k_0 を求めよ。また、式 (1) の右辺の各項がそれぞれ何に対応するかを説明せよ。

問 2. $x\geq 0$ においてポテンシャル $V(x)$ が一定値 V_1 をとり、かつ $V_1<E$ である場合について、次の問に答えよ。

(a) $x\geq 0$ における波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。その際波動関数の振幅は C とせよ。ただし、C は一般に複素数である。

(b) $x=0$ での境界条件より定数 B と C を求め、波動関数を決定せよ。

(c) 粒子の正味の流れ密度 $j(x)$ は

$$j=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$$

で与えられる。j を振幅 C を用いて表せ。さらに、$V_1<0$ の場合、$|V_1|$ の増大とともに振幅 C の絶対値は小さくなる。その理由を、流れ密度 j を用いて簡潔に説明せよ。

問 3. 次に、$x\geq 0$ においてポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x)=\begin{cases} V_1 \quad (\text{定数}) & (0\leq x<L) \\ +\infty & (x\geq L) \end{cases} \tag{2}$$

と与えられ、$V_1<E$ であるとする。この場合に対し、次の問に答えよ。

(a) 係数 B の絶対値は 1 と予想される。その理由を簡潔に述べよ。

(b) $0\leq x<L$ における波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。その際波動関数の振幅は C とせよ。

(c) B と C を求め、波動関数を決定せよ。

(d) $V_1<0$ かつ $|V_1|\gg E$ の場合、式 (2) のポテンシャルにおける長さ L がある条件を満たすときのみ、振幅 C の絶対値は 1 程度の大きさになる。その条件を求めよ。