物 理（1）

重力相互作用をしている 2 つの質点を考える。それぞれの質量を m_1 と m_2、任意の座標中心からの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ とする。以下の問に答えよ。なお、重力定数を G とする。

問 1. この系のラグランジアン L とエネルギー E を書け。

問 2. ここで、2 つの質点間のベクトル $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ を導入し、さらに座標原点を慣性中心に移す（$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$）。この系のラグランジアン L を、相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて書け。ただし、$r \equiv |\boldsymbol{r}|$ とする。

問 3. 質点の運動はある平面（軌道面）に制限される。その理由を記せ。

問 4. この軌道面に平面極座標 (r, θ) を導入して、それぞれの座標方向の運動方程式を導出せよ。

問 5. 2 つの質点が互いに円運動をしている場合を考える。2 点間の距離を r_c とする。円運動の周期 P_c と r_c の関係を、与えられた記号のみを用いて表せ。

問 6. 問 5 の円運動に対して、r 方向に微小の摂動を与えると、系は円運動からわずかにずれた軌道運動をする。この運動の r 方向の微小振動について、その角振動数 ω_r を求めよ。また、この軌道の特徴を理由とともに記せ。

問 7. 最初に円運動していた 2 つの質点のうち、一方の質点の質量 m_1 が瞬間的に m_1'（ただし $m_1' < m_1$）に変化した場合を考える。この系が重力的に束縛され続けるために必要な m_1'、m_1、m_2 の間の条件を書け。

物 理（2）

大きさ H の一様な磁場中に置かれた常磁性体について、熱力学第 1 法則は、

$$dU = TdS - MdH$$

と記述される。ここで、U は場のエネルギーを含まない内部エネルギー、T は温度、S はエントロピー、M は磁化（全磁気モーメント）である。以下の問に答えよ。

問 1. $F = U - TS$ で定義される自由エネルギー F について、$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_H$ および $M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T$ が成り立つことを示せ。

以下では、常磁性体を大きさ μ_B の永久磁気モーメントを持つ常磁性原子 N 個から構成されるものと考える。ここで、原子の微視的な永久磁気モーメントは磁場に対して任意の連続的な向きをとれる古典的な磁気モーメントとする。また、巨視的な磁化 M は、各微視的永久磁気モーメントの磁場方向の成分の和としてモデル化する。ただし、常磁性体の原子は互いに区別つき、原子間の相互作用はないものとする。

問 2. 常磁性原子 1 個について原子の永久磁気モーメントが磁場に対し θ の角をなすとき、磁気モーメントのポテンシャルエネルギーは、$\epsilon = -\mu_B H \cos\theta$ である。したがって、常磁性原子 1 個の分配関数 $Z(T, H, 1)$ は、全ての磁気モーメントの方向についてボルツマン因子を立体角積分することにより、

$$Z(T, H, 1) = \int \exp(-\beta\epsilon) d\Omega$$

から求めることができる。ただし、$\beta = 1/(k_B T)$ であり、k_B はボルツマン定数である。このとき、

$$Z(T, H, 1) = \frac{4\pi}{\beta\mu_B H} \sinh(\beta\mu_B H)$$

となることを示せ。

問 3. $\mu_B \cos\theta$ の期待値が、

$$< \mu_B \cos\theta >= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H} \log Z(T, H, 1)$$

と表せることを示せ。

問 4. N 個の常磁性原子の分配関数 $Z(T, H, N)$ を、$Z(T, H, 1)$ および N を使って表せ。

問 5. N 個の常磁性原子の自由エネルギー F を β、H、および N の関数として求めよ。

問 6. M を β、H、および N を用いて表せ。

問 7. 内部エネルギー U は $U = -MH$ と表すことができる。磁場が一定の時の比熱 $C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{H,N}$ が、高温・弱磁場極限（$\beta\mu_B H \ll 1$）において $C_H \to 0$ となることを示し、その物理的な理由を説明せよ。また、低温・強磁場極限（$\beta\mu_B H \gg 1$）において $C_H \to Nk_B$ となることを示し、その物理的な理由を説明せよ。

物 理（3）

問 1. 原点を中心にした半径 a の球内に電荷が一様な電荷密度で分布している。球の全電荷は $-Q<0$ とする。このとき、球の内と外の電場 $\boldsymbol{E}$、静電ポテンシャル Φ を求めよ。ただし、真空の誘電率は ε_0 とし、ポテンシャルは無限遠でゼロとせよ。以下では、この一様帯電球の電荷分布は加えられた電場に依って変化しないものとする。

問 2. 問 1 の一様帯電球の中心に電荷 Q を持つ点電荷を置き、z 軸方向に一様な電場 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\boldsymbol{e}_z$ をかけると、点電荷は原点から距離 h のところで静止した。ここで、$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の基底ベクトルである。この時、常に $h<a$ とする。次の問に答えよ。

(a) E_0 と h の関係を表せ。

(b) 一様帯電球と点電荷からなる系の電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を求め、$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}_0$ と定義される係数 α を求めよ。

問 3. 問 1 の一様帯電球内に束縛された質量 m、電荷 Q を持つ点電荷が、電場成分が $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = E_i\, e^{i\omega t}\,\boldsymbol{e}_z$ で表される平面電磁波の場中にある。ここで、E_i、ω はゼロでない正の定数で、$\omega \neq \sqrt{\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}} = \omega_0$ とする。点電荷の速度は光の速度 c より十分に遅いものとして、次の問に答えよ。

(a) 点電荷の運動方程式を求め、一般解を求めよ。

(b) (a) で求めた解のなかで、$e^{i\omega t}$ に比例する解に対応する点電荷の運動によって放出される電磁波は、点電荷による散乱波に相当する。この散乱波を系から十分遠方で観測したときの電場 $\boldsymbol{E}_s$ と磁場 $\boldsymbol{B}_s$ を求めよ。

(c) 散乱電磁波のポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{B}_s$、ここで μ_0 は真空の透磁率である) の時間平均を求め、単位時間当たりに半径 r の球面上の立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 内に散乱される電磁波のエネルギーを求めよ。また、半径 r の球面を通る散乱波の単位時間当たりの全エネルギーを求めよ。ここで、(r,θ,ϕ) は原点を中心とした球面極座標であり、r は十分大きいとする。

(d) 一様帯電球による点電荷の束縛が弱い場合（$\omega \gg \omega_0$）と強い場合（$\omega \ll \omega_0$）のそれぞれについて、散乱波の単位時間当たりの全エネルギーの入射電磁波 $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ の波長依存性を調べ、束縛点電荷による平面波の散乱の性質について議論せよ。

必要があれば以下の公式を用いてよい。

公式 1: 十分ゆっくり時間変化する電気双極子 $\boldsymbol{p}$ から放射される電磁波の十分遠方での電場と磁場は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{n}\times\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{p}[t-rc^{-1}]\right)}{r}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}.$$

ここで、$\boldsymbol{n}$ は電気双極子から観測点に向いた単位ベクトル、r は電気双極子から観測点までの距離である。

公式 2: ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ について、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\mathbf{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$$

物 理（4）

次のような古典的ハミルトニアンをもち 1 次元方向の運動をする質量 m の量子力学的粒子を考える。

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

このとき、以下の問に答えよ。

問 1. 量子状態が十分小さな広がりの波束のとき、次の方程式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dt} < \hat{p} >= -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

ただし、$\hat{A}$ は A が演算子であることを表し、$< \hat{A} >$ はその期待値である。この方程式が古典的な運動方程式と一致するのはどのようなときか答えよ。

問 2. 任意の状態 $\psi(x)$ を x 方向に a だけ並進移動させる次のような演算子 $\hat{U}$ を考える。

$$\hat{U}\psi(x) = \psi(x+a)$$

$\hat{U}$ が次式で与えられることを示せ。

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{ia\hat{p}}{\hbar}\right)$$

問 3. 以下では、ポテンシャルが次のように周期 a の周期関数であるとする。

$$V(x+a) = V(x)$$

このとき、ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ の固有関数 $\psi(x)$ は演算子 $\hat{U}$ の固有関数でもあることを示せ。すなわち、

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x),\ \hat{U}\psi(x) = \alpha\psi(x)$$

を示せ。

問 4. 問 3 の固有値 α が、

$$\alpha = e^{i\theta}$$

と書けることを示し、θ の物理的な意味を述べ、波動関数が次の形に書けることを示せ。

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right)u(x)$$

ここで、$u(x)$ は $u(x) = u(x+a)$ を満たす任意の関数である。

問 5. 粒子の運動量の取る範囲が制限されることを示せ。