物 理（1）

問 1. 以下の問に答えよ。

(a) ハミルトンの原理（最小作用の原理）とは何か、簡単に説明せよ。

(b) 1 次元運動において時刻 t における座標を $q(t)$ とする。このときラグランジュ関数 $L(q,\dot{q},t)$ の時間 $t=t_1$ から $t=t_2$ までの定積分 $I \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$ を定義する。ただし、$\dot{q}$ は q の時間微分を表す。ハミルトンの原理からラグランジュ関数 L がみたすべき方程式を導け。

問 2. 質量がそれぞれ M と m の質点 A と B が、質量の無視できる長さ l の剛体棒で連結されて、滑らかな水平面上に置かれている (図 1)。水平面上の直交座標系 (x,y) において、質点 A は x 軸上に束縛されて運動するものとする。質点 A の x 座標 X、および、棒が x 軸となす角 θ を座標として採用する。以下の問に答えよ。

(a) この系のラグランジュ関数 L を書け。

(b) この系の循環座標は何か。また循環座標に関連する保存量を式で表せ。

以下では、時刻 $t=0$ において質点 A は原点に静止し、質点 B は x 軸上の正の位置にあって、y 軸の正の方向に速さ $v(>0)$ で運動している場合を考える。

(c) 系のエネルギーが保存されることに留意して X の時間微分を消去し、θ の運動方程式を求めよ。また横軸に θ、縦軸に θ の時間微分 $\dot{\theta}$ をとった平面において、この運動の振る舞いを簡単に図示せよ。

(d) 質点 A が x 軸上を振動することを示せ。

(e) m/M が 1 に比べて非常に小さいとき、θ と t の関係を式で表せ。m/M の 2 次以上を無視してよい。また、質点 A の振動の周期を求めよ。

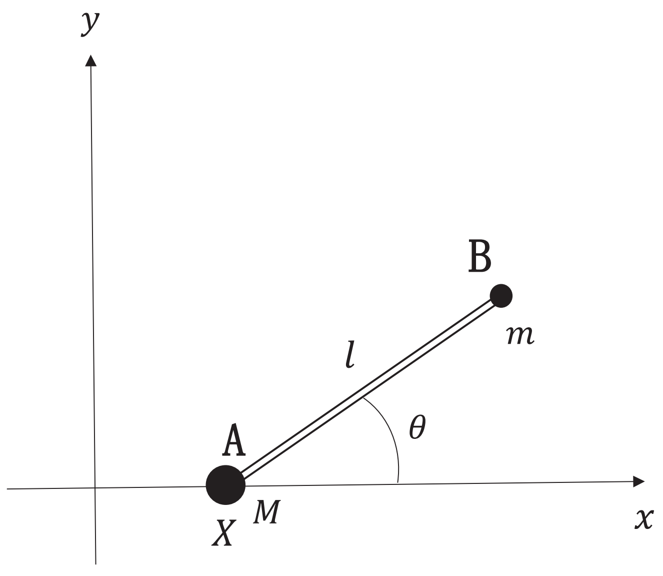

図 1

物 理（2）

問 1. N 個の粒子からなる温度 T、圧力 P、内部エネルギー U の単原子理想気体が体積 V の容器に閉じ込められている。容器にはピストンがあり、それを使って外界と仕事のやり取りが出来るものとする。以下の問に答えよ。

(a) 圧力 P、内部エネルギー U を、N、T、V などを用いて表せ。

(b) エントロピー S の表現を求め、N、T、V などを用いて表せ。

(c) 温度 T を一定に保ちながら気体の体積を V から V' に準静的に変化させるとき、気体が受け取る熱量を求めよ。

(d) エントロピー S を一定に保ちながら気体の体積を V から V' に準静的に変化させるとき、気体のなす仕事量を求めよ。

(e) 温度 T、体積 V の気体を自由膨張させ体積を $V'(> V)$ としたとき、エントロピーの変化を求めよ。この過程で外部との熱のやり取りや、気体内での散逸はないものとする。

問 2. 質量 m のボーズ粒子 N 個からなる温度 T、体積 V の非相対論的な理想気体を考える。粒子の化学ポテンシャルを $\mu(\leq 0)$ とする。以下の問に答えよ。

(a) エネルギー準位 $\epsilon(\geq 0)$ について、大きな状態和 (分配関数) $Z(\epsilon, \mu, T)$ を求めよ。

(b) エネルギー準位 ϵ を占める平均粒子数 $n\,(\epsilon, \mu, T)$ を求めよ。

(c) 低温の極限で全粒子数 N にほぼ等しい数の粒子が基底状態 $\epsilon = 0$ を占める。このときの化学ポテンシャル μ を T と N を用いて表せ。

(d) 系に含まれる全粒子数 N は、基底状態にある粒子の数 N_0 と励起状態 $(\epsilon_j > 0)$ にある粒子の数 N_e の和として $N = \sum_j n\,(\epsilon_j, \mu, T) = N_0 + N_e$ で与えられる。エネルギー状態 ϵ_j が稠密であるとして $N_e = \sum_{\epsilon_j > 0} n\,(\epsilon_j, \mu, T)$ の和を積分で置き換えて、

$$N_e = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n(\epsilon, \mu, T)\frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3}$$

とする。温度が低いとき、$\mu = 0$ として N_e の温度 T に対する依存性を求めよ。ここで、$\epsilon = \boldsymbol{p}^2/2m$ とする。ただし、$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は粒子の運動量ベクトル、h はプランク定数である。

(e) $N_e = N$ となる温度を T_c とする。$T < T_\mathrm{c}$ のとき、基底状態にある粒子数 N_0 を T/T_c と N を用いて表せ。

物 理（3）

問 1. 導体中の電磁波の伝播を考える。この導体の電気伝導率、誘電率、透磁率をそれぞれ、σ、ε、μ とする。以下の問に答えよ。なお、以下では MKSA 単位系を用いる。

(a) 導体中では電場 $\mathbf{E}$ と電流密度 $\mathbf{j}$ の間に、オームの法則 $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ が成り立つとする。このとき、導体内部での電磁波を記述する方程式

$$\nabla^2\mathbf{E} \;=\; \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

をマクスウェル方程式から導出せよ。

(b) デカルト座標 (x, y, z) を考え、導体が $z > 0$ の半無限領域を占めるとする。この導体内部での電場が $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (E_0 e^{i(kz-\omega t)}, 0, 0)$ と記述されるような、z 方向に伝播する平面電磁波を考える (ただし E_0 は定数である)。この電磁波の分散関係式 (波数 k と角振動数 ω の関係式) を導出せよ。

(c) この導体内に電磁波が z の正方向に向かって入射するとき、ある深さ δ で振幅が $1/e$ となる。δ を求めよ。ただし、$\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ が成り立つものとする。

※次のページにも問題があるので注意すること

問 2. 以下の問に答えよ。

(a) 十分大きな誘電体板 (誘電率 ε) を平行平板コンデンサの間に挿入して電圧をかけたところ、内部に一様な電場 E が発生した。正電極表面とそれに接する誘電体板表面に発生した面電荷密度 (それぞれ ω_{e}、ω_{d} とする) を求めよ。ただし、真空の誘電率を ε_0 とする。

(b) この誘電体内部に半径 a の小さな球状の空隙を考える (図１参照)。このとき、空隙表面に発生する分極電荷の面密度分布 $\omega_{\mathrm{p}}(\theta)$ を求めよ。ここで、θ は電場 E の方向から測った角度である。

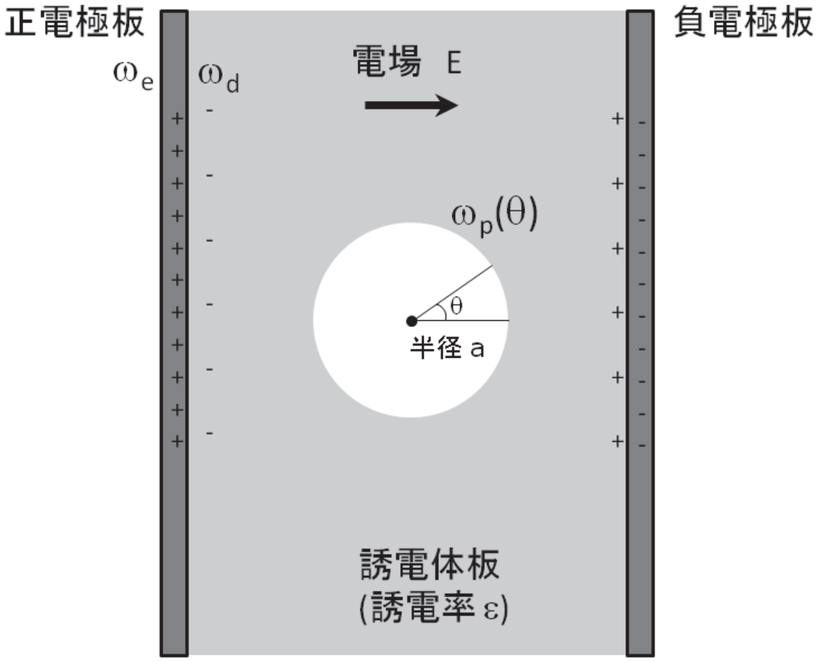

図 1

(c) 空隙表面の電荷 $\omega_{\mathrm{p}}(\theta)$ により空隙の中心に作られる電場 E' を求めよ。

(d) 以上の結果を用い、誘電体の誘電率と誘電体を構成する個々の分子の分極率との関係を、次のようにして考察することにしよう。誘電体中に分子が数密度 N で一様に分布しているものとする。ある分子に着目したとき、それ以外の残りの誘電体全体が、この分子の周りに半径 a の球状空隙をもった連続体として近似できるとすると、個々の分子はそれぞれ $E_{\text{分子}} = E + E'$ で与えられる電場を感じることになる。ここで、E、E' はそれぞれ、(a)、(c) での E、E' と同じものである。このとき、誘電体の誘電率 ε を分子の分極率 α を用いて書き表せ。ただし、電場 $E_{\text{分子}}$ を受けた一つの分子に発生する電気双極子モーメントは $p = \alpha E_{\text{分子}}$ で与えられる。

物 理（4）

問 1. 固有角振動数 ω の一次元調和振動子のハミルトニアンは、粒子の運動量 p、位置 x、質量 m を用いて以下のように書ける。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ここで、x、p は交換関係 $[x,p] = i\hbar$ を満たす演算子であり、$\hbar = h/2\pi$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。以下の問に答えよ。

(a) 不確定性関係式 $\Delta p \times \Delta x \geq \hbar/2$ を用いて最低エネルギーを求めよ。

(b) 以下で定義される演算子 a、$a^\dagger$ を用いてハミルトニアンを書き換えよ。

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega x), \qquad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega x)$$

(c) 演算子 $N \equiv a^\dagger a$ の固有値を ν としたとき、$\nu \geq 0$ であることを示せ。

(d) 一次元調和振動子のエネルギー固有値が、ゼロ以上の整数 n を用いて

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

で与えられることを示せ。

(e) エネルギー固有値 E_n に対する一粒子のエネルギー固有状態を $\psi_n(x)$ で表す。以下の量を計算せよ。ただし、$\psi_n(x)$ は規格化されているとし、* は複素共役を表す。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) x^2 \psi_n(x)$$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) x \psi_1(x) \neq 0$ を満たす n を答え、そのときの積分値を求めよ。

問 2. 問 1 で扱った系の $n = 1$ と $n = 2$ の状態に一つずつ電子が入っている、二電子状態を考える。以下の問に答えよ。

(a) 量子力学において二電子状態を扱うとき、フェルミ粒子性と、一つ一つの電子を識別できないこと（同種粒子性）を考慮しなければならない。フェルミ粒子性とはどのようなものか説明せよ。

以下の二つは、同種粒子性、フェルミ粒子性を考慮して作られた、$n = 1$ と $n = 2$ の状態に一つずつ電子が存在する二電子状態を表す波動関数である。

$$1. \quad \Phi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\right] \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{+,1}\sigma_{-,2} - \sigma_{+,2}\sigma_{-,1})$$

$$2. \quad \Phi_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\right] \times \sigma_{+,1}\sigma_{+,2}$$

ここで、x_1、x_2 は二つの電子の座標であり、$\sigma_{a,1}$、$\sigma_{a,2}$ は、それぞれ座標 x_1 および x_2 で識別される電子の規格化されたスピン状態関数である。$a = +$ は上向きスピン状態を $a = -$ は下向きスピン状態を表す。以下の問に答えよ。

(b) 二つの状態 Φ_1、Φ_2 のそれぞれに対して 2 電子間の相対距離の 2 乗の平均を答えよ。

(c) 2 電子間相対距離の 2 乗の平均は、状態 Φ_1 と比べて状態 Φ_2 は長くなる。その物理的理由を述べよ。