令和８年度 博士課程前期２年の課程一般選抜 天文学専攻 筆記試験出題意図

英語

大問１

この大問は、科学史における周期表の発展過程を題材に、英語での論理的・時系列的な説明文の読解力を評価することを目的としていました。複数の科学者の発見や概念の変遷を関連づけて理解する力を測り、文中の因果関係を英語で簡潔に説明する力も問われていました。さらに、語彙・構文の理解に加えて、抽象概念を文脈から適切に説明できるかを確認する問題でした。

大問２

この大問は、確率・代数・文章題といった数学的思考力と、英語での論理処理能力の統合的理解を測ることを目的としていました。問題文や表の英語を正確に読み取り、そのうえで計算や論理推論を行う力を評価しました。また、確率・比例・連立方程式・文章題など複数分野を横断的に出題し、総合的な応用力と論理展開の明確さを試す構成となっていました。

大問３

科学的テーマに基づく英語ライティング能力を評価することを目的とした問題でした。単に意見を述べるだけでなく、物理定数の意味を理解し、論理的に展開する力を測る意図がありました。与えられたフォーマットに従って、明確な段落構成（主張・利点と欠点・結論）を英文で表現できるかを重視しました。語彙力・文法力に加え、科学的思考を英語で筋道立てて説明する能力を見つつ、内容の正確さよりも、英語での論理構成力と表現の一貫性を評価しました。

物理（1）

問 1 ：前半は、最小作用の原理からオイラー・ラグランジュ方程式、ハミルトンの正準方程式を導出する基本的な問題です。後半は、ポアソン括弧を使って解析力学の形式を記述できるかを問うものです。

問 2 ：球面振り子の運動を解析力学の形式で理解する問題です。角運動量保存・エネルギー保存を確かめたあと、安定な回転運動の周りの摂動を取り扱っています。また、後半は運動の様子を位相空間で理解できるかを問うものです。

物理（2）

問 1 では、理想気体のヘルムホルツの自由エネルギーや化学ポテンシャルの表式を統計物理学の考え方にしたがい導出することができるかを問うています。

問 2 は部分電離水素気体の電離平衡状態および電離平衡下での定積熱容量について問う問題であり、これらの結果を物理的に理解できているかを確認する意図で出題しています。電離平衡等の化学平衡は天体を理解する上での基礎事項ですので、確実に学んでおきましょう。

物理（3）

前半では、直線状導線を流れる電流が作るベクトルポテンシャルから磁束密度を導出したり、マクスウェル方程式から電磁場のエネルギーに関する連続の方程式を導く問題を出題し、電磁気学の基本的な法則についての理解を確認しました。

後半は、ポインティングベクトルから電磁波による放射圧を導出し、太陽光を反射する平板が受ける力を実際に求めることで、電磁場が持つ応力を実感してもらう問題を目指しました。

物理（4）

最も基本的な原子である水素原子の最も基本的な遷移である Lyman-α の自発放射についての問題です。 天文学を始めとして物理学でしばしば現れる Lyα のエネルギーや遷移率(A 係数)の値を実際に計算して導出することで、これらが量子力学の原理に基づいて記述できることを実感してもらいたいと考え出題しました。時間に依存する摂動論を使って具体的な計算をすることは学部レベルでは少ないと思われるので、 慣れていなくても指示に従って論理的に考えれば計算できるよう細かく誘導しました。誘導に従って丁寧 に計算できるかどうか、また得られた結果の物理的解釈を正しく説明できるかを通じて、計算力に加えて量子力学の理解を総合的に問うことを意図した問題です。

物理 (1)

問 1

独立な座標が N 個ある系において、q_i を系の i 番目の一般化座標とし、$\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ とする。以下、系における力は全てポテンシャルから導けるとする。

(a) ラグランジアンを $L = L(q_1, q_2, ..., q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N, t)$ としたとき、作用積分は

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

と書ける。最小作用の原理からオイラー・ラグランジュ方程式を導出せよ。t は時間で、t_1, t_2 はそれぞれ定まった時刻であり、変分 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ が満たされているとする。

(b) p_i を q_i の共役な運動量とし、ハミルトニアンを $H = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L$ とする。最小作用の原理からハミルトンの正準方程式を導出せよ。

任意の物理量 f, g に対してポアソン括弧を以下のように定義する。

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(c) 物理量 f の時間全微分をポアソン括弧を用いて表し、f が保存する条件を説明せよ。

(d) ハミルトンの正準方程式をポアソン括弧を用いて表せ。

次のページにも問題があるので注意すること

問 2

図 1 のように、長さ ℓ で質量が無視できる棒の端についた、質量 m の質点の運動を考える。質点がついていない側の棒の端は、原点 O で固定されているとする。重力の向きは鉛直下向きで、重力加速度を g とする。角度 θ、ϕ はそれぞれ、質点と鉛直下向きのなす角、質点の位置の方位角である。

(a) θ、ϕ のそれぞれに共役な運動量を p_θ、p_ϕ とする。ハミルトンの正準方程式から p_θ、p_ϕ が従う微分方程式を求め、p_ϕ が保存することを示せ。

(b) 力学的エネルギー E が保存することを示せ。

(c) ある p_ϕ と E に対して、質点の θ 方向の運動は有限の範囲 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ に限られる。θ_1 と θ_2 を求めるための式を導け。導いた式から、$p_\phi \neq 0$ の場合には質点が $\theta = 0$ を通らないことを示し、その物理的理由を簡潔に説明せよ。

(d) 初期に $\theta = \theta_0$ (ただし、$0 < \theta_0 < \pi/2$) で、ϕ 方向にある角速度 Ω を与えたところ、質点は θ が一定のまま回り続けた。このとき、Ω を求めよ。

(e) 上記 (d) の状態で、θ 方向に微小な摂動を与えたところ、質点は $\theta = \theta_0$ のまわりで振動しながら ϕ 方向の回転を続けた。θ 方向の振動の周期を θ_0 と Ω を用いて表せ。

以下では、$p_\phi = 0$ の運動を考える。

(f) 力学的エネルギー E によって場合分けして、θ と p_θ の位相空間における運動の軌跡の概形を図示し、それぞれの運動の様子を説明せよ。ただし、運動の軌跡は向きとともに θ が -3π から $+3\pi$ の範囲で図示し、エネルギーの場合分けの境界となる軌跡は点線で示せ。

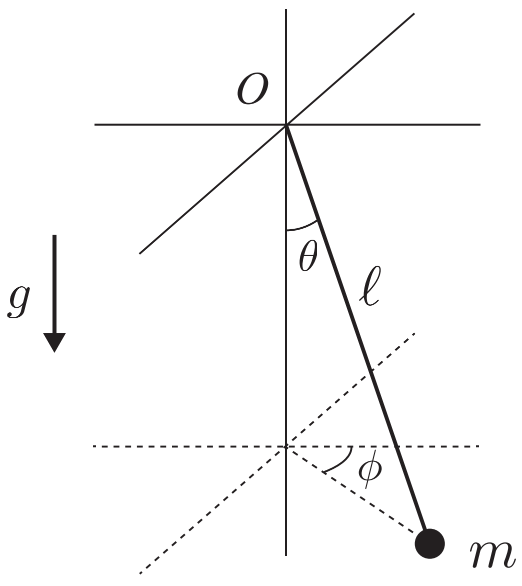

図 1

物 理（2）

問 1. ある体積 V の系が温度 T の熱平衡状態にある。この系の各微視的状態 i のエネルギーを E_i で表す。

(a) 系の微視的状態 i が実現される確率は系のヘルムホルツの自由エネルギー F を用いて

$$\exp\left(\frac{F-E_i}{kT}\right)$$

と与えられることを示せ。ただし、k はボルツマン定数である。

次に、この熱平衡状態にある系として多数の同種粒子からなる理想気体の系を考える。気体粒子の 1 粒子状態 j のエネルギーを ε_j と書く。系の全エネルギー E_i は気体粒子それぞれのエネルギー ε_j の和で与えられる。

(b) この理想気体の系の自由エネルギー F は、1 粒子状態に対する総和を用いて

$$F=-NkT\ln\left[\frac{e}{N}\sum_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{kT}\right)\right]$$

と与えられることを示せ。ただし、N は気体の粒子数であり、e は自然対数の底である。必要であればスターリングの公式 $\ln(N!)\simeq N\ln\left(\dfrac{N}{e}\right)$ を用いてもよい。

(c) 気体粒子の内部状態が励起されている確率は十分低く、すべての粒子の内部状態はエネルギー ε_0' の基底状態であるとみなせるとする。その基底状態の多重度は g とする。このとき、1 粒子状態のエネルギー ε_j は

$$\varepsilon_j=\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m}+\varepsilon_0'$$

と並進運動のエネルギーと内部状態の基底エネルギーの和で書かれる。ここで、$\boldsymbol{p}$、m は 1 つの粒子の運動量と質量である。また気体粒子の並進運動は古典的に扱えるとする。以上の場合において、この理想気体の化学ポテンシャル μ は

$$\mu=\varepsilon_0'-kT\ln\left[\frac{g}{n}\,\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}\right] \tag{1}$$

と与えられることを示せ。ただし、$n=N/V$ は気体粒子の数密度であり、h はプランク定数である。また、必要であれば積分公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}$ を用いてもよい。

さらに、気体粒子の並進運動が古典的に扱えるための温度に対する条件も書け。

※次のページにも問題があるので注意すること

問 2. 一部が電離した水素の希薄な気体が体積 V の中に閉じ込められている。この部分電離水素気体は熱平衡かつ $\mathrm{H} \rightleftharpoons \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^-$ の電離平衡の状態にある。また電気的に中性であり、気体粒子間の静電エネルギーは無視できる。水素原子が励起状態にある割合は小さく、これら励起状態の寄与は無視できるとする。このとき、この部分電離水素気体の内部エネルギーは

$$U = \frac{3}{2}(n_H + n_p + n_e)kTV + \chi n_p V$$

と書くことができる。ここで、n_H、n_p、n_e はそれぞれ水素原子、陽子、電子の数密度であり、χ は水素原子 1 個の電離エネルギーである。

(a) この部分電離水素気体の定積熱容量 C_V が次式で与えられることを示せ。

$$C_V = \frac{3}{2}(n_H + 2n_p)kV + kTV\left(\frac{3}{2} + \frac{\chi}{kT}\right)\left(\frac{\partial n_p}{\partial T}\right)_V$$

さらに、この表式の $\left(\dfrac{\partial n_p}{\partial T}\right)_V$ に比例する項の物理的意味を説明せよ。

(b) この希薄な気体中の水素原子の化学ポテンシャルは問 1(c) の式 (1) から得られる。水素原子の基底状態の多重度は核スピンを考慮すると 4 である。 陽子と電子の化学ポテンシャルも同様に式 (1) から得られる。水素原子、陽子、電子の基底状態のエネルギーをそれぞれ $\varepsilon'_{0,H}$、$\varepsilon'_{0,p}$、$\varepsilon'_{0,e}$ と書くと、電離エネルギーは $\chi = \varepsilon'_{0,p} + \varepsilon'_{0,e} - \varepsilon'_{0,H}$ と与えられる。これらの化学ポテンシャルを用い、また電子質量を m_e として、以下の水素の電離平衡に対するサハの式を導出せよ。

$$\frac{n_p n_e}{n_H} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3}\exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right)$$

さらに、希薄な水素原子気体の電離は、$\exp\left(-\dfrac{\chi}{kT}\right) \ll 1$ が成り立つ温度で進行することをサハの式を用いて示せ。これより平衡下で水素気体は $T \simeq \dfrac{\chi}{k}$ より低い温度でほぼ電離する。

(c) サハの式を使い $\left(\dfrac{\partial n_p}{\partial T}\right)_V$ を計算し、以下の C_V の表式を導出せよ。

$$C_V = \frac{3}{2}(n_H + 2n_p)kV + kV\left(\frac{3}{2} + \frac{\chi}{kT}\right)^2 \frac{n_H n_p}{2n_H + n_p}$$

さらに、電離が進行するとき、希薄な部分電離水素気体の定積熱容量 C_V は電離を考慮しない場合に比べて大きく増大することを示せ。

物 理 (3)

以下の問 1 から問 3 は全て MKSA 単位系を用いている。また、真空中の誘電率を ϵ_0、真空中の透磁率を μ_0 とする。

問 1. z 軸上に置かれた無限に長い直線状導線に定常電流 I が流れているとする。磁束密度を $\boldsymbol{B}$、ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}$ とする。

(a) $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ を使って、

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1}$$

と表すことができる。 この時、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

が常に成り立つことを示せ。また、式 (2) の物理的な意味を説明せよ。

(b) z 軸上の座標 $(0, 0, l)$ から $(0, 0, -l)$ までの範囲に存在する導線の有限部分が、$z = 0$ の xy 平面上において、z 軸から距離 r の点に作るベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を求めよ。ここで、電流素片 $Id\boldsymbol{r'}$ が位置 $\boldsymbol{r}$ に作るベクトルポテンシャル $d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は

$$d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{3}$$

と定義されるものとし、積分を実行した形で示すこと。

(c) 問 1(b) と式 (1) を用いて、無限に長い直線状導線に定常電流 I が流れている場合の距離 r の点における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を導出せよ。

問 2. 電場と電束密度を $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{D}$、磁場と磁束密度を $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{B}$、電荷密度を ρ, 電流密度を $\boldsymbol{i}$ とした時、以下の問いに答えよ。

(a) マクスウェル方程式および

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) \tag{4}$$

の関係を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}\right] + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = 0 \tag{5}$$

を導出せよ。

(b) 式 (5) の各項がどのような量なのかを述べた上で、式 (5) の物理的意味を説明せよ。

(c) 図 1 のような半径 a、長さ L、抵抗 R の円柱状導体の両端に電圧 V がかけられ、導体に一様で定常な電流 I が流れているとする。円柱側面のすぐ内側における電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を求めよ。それぞれ、大きさだけでなく、向きも示すこと。

(d) 図 1 の円柱側面のすぐ内側におけるポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ の向きと大きさを求めよ。さらに、円柱側面から内部に流れ込む単位時間あたりのエネルギーの総量を計算し、円柱内部で発生するジュール熱と比較せよ。

※ 次のページにも問題があるので注意すること

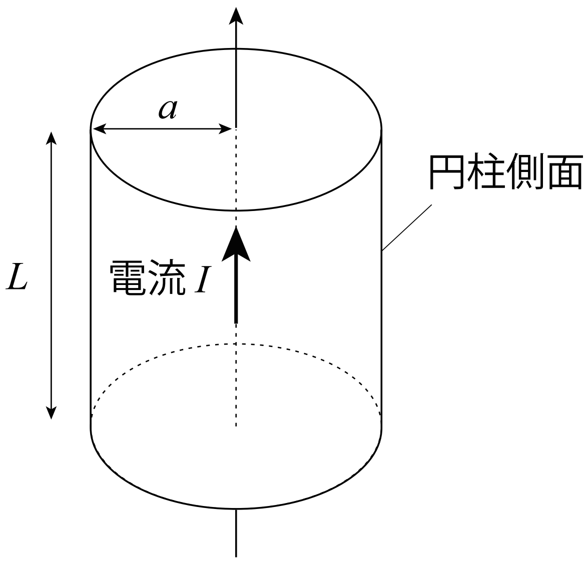

図 1

問 3. 電磁場の応力に関連する以下の問に答えよ。必要に応じて、電場を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$ とした時の電場によるマクスウェル応力テンソル

$$\begin{pmatrix} T_{xx}^{(e)} & T_{xy}^{(e)} & T_{xz}^{(e)} \\ T_{yx}^{(e)} & T_{yy}^{(e)} & T_{yz}^{(e)} \\ T_{zx}^{(e)} & T_{zy}^{(e)} & T_{zz}^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x D_x - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}/2 & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}/2 & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}/2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と、磁場を $\boldsymbol{H}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とした時の磁場によるマクスウェル応力テンソル

$$\begin{pmatrix} T_{xx}^{(m)} & T_{xy}^{(m)} & T_{xz}^{(m)} \\ T_{yx}^{(m)} & T_{yy}^{(m)} & T_{yz}^{(m)} \\ T_{zx}^{(m)} & T_{zy}^{(m)} & T_{zz}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x B_x - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2 & H_x B_y & H_x B_z \\ H_y B_x & H_y B_y - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2 & H_y B_z \\ H_z B_x & H_z B_y & H_z B_z - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

を用いてよい。

(a) 誘電率 ϵ_1、ϵ_2 を持つ領域 1 および領域 2 が平面状の境界面で接しており、電場 $\boldsymbol{E}$ がこの境界面に平行に存在する時、境界面において領域 1 から領域 2 の方向に単位面積あたりに働く力を求めよ。境界面には真電荷および真電流は存在しないものとする。

(b) x 軸方向に直線偏光した平面電磁波が z 軸方向に進んでいる時、以下の問に答えよ。

(b-1) 電磁波によって単位体積あたりに z 軸方向に働く力を、ポインティングベクトルの大きさ S、ϵ_0、μ_0 を使って表せ。

(b-2) 電磁波を完全反射する物体に平面電磁波が垂直に入射した場合の放射圧をポインティングベクトルの大きさ S と光速 c を使って表せ。

(b-3) 太陽からの単位時間、単位面積あたりの放射エネルギーを 1400 $\mathrm{W/m^2}$ とした時、太陽光を完全に反射する 10 m 四方の平板 (ソーラーセイル) が受ける力を有効数字 1 桁で計算せよ。この時、太陽光は平面電磁波とし、ソーラーセイルに垂直に入射したと仮定せよ。

物 理（4）

以下の問に答えよ。この問題では cgs-Gauss 単位系を使用し、エネルギーの単位は eV を用いる。プランク定数を h、換算プランク定数を $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 6.58 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}$、光速度を $c = 3.00 \times 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ とする。また、単位電荷を e、電子の質量を m_e とし、電子の質量エネルギーは $m_e c^2 = 5.11 \times 10^5\,\mathrm{eV}$ である。電子のスピンの自由度は問題を通して無視する。結果だけでなく導出過程も含めて記述すること。

問 1. 水素原子中の電子と電磁波との相互作用による状態間の遷移を 2 準位系として簡単化して考察する。

(a) 水素原子中の電子のハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}$$

ただし $\mathbf{p}$ は運動量演算子であり、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。x 座標とハミルトニアンの交換関係 $[x, H]$ を計算せよ。

(b) エネルギー $E = E_1$ を持つ状態 $|\phi_1\rangle$ とエネルギー $E = E_2$ を持つ状態 $|\phi_2\rangle$（$E_2 > E_1$ とする）は時間に依存しないシュレーディンガー方程式の固有状態であり、正規直交基底になっている。すなわち、

$$H|\phi_1\rangle = E_1|\phi_1\rangle, \qquad H|\phi_2\rangle = E_2|\phi_2\rangle,$$

$$\langle\phi_j|\phi_k\rangle = \int \phi_j^* \phi_k dV = \delta_{jk}$$

と書ける。ここで δ_{jk} はクロネッカーのデルタ、* は複素共役を表す。
時間に依存するシュレーディンガー方程式から、各固有状態が時間依存性まで含めて以下の形に書けることを示せ。

$$|\Phi_1(t)\rangle = \exp\left(\frac{E_1}{i\hbar}t\right)|\phi_1\rangle, \qquad |\Phi_2(t)\rangle = \exp\left(\frac{E_2}{i\hbar}t\right)|\phi_2\rangle$$

(c) 摂動がなければ状態間の遷移は起こらない。この系に対して微小な摂動を加えたハミルトニアンを $H + H'$ とする。H' は時間に依存するが、時間微分演算子は含まないとする。摂動があってもこの系の状態 $|\Psi\rangle$ は $|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle$ で展開できるが、その係数 c_1, c_2 は時間に依存する。

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)|\Phi_1(t)\rangle + c_2(t)|\Phi_2(t)\rangle$$

これを時間に依存するシュレーディンガー方程式に代入することで、各状態の係数 c_j $(j = 1, 2)$ の時間変化率が次の形に書けることを示せ。

$$\frac{dc_j(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_{k=1}^{2} c_k(t) \exp\left[\frac{(E_k - E_j)}{i\hbar}t\right]\langle\phi_j|H'|\phi_k\rangle \tag{1}$$

（※次のページにも問題があるので注意すること）

(d) エネルギー $E = \hbar\omega$ (ω は光子の角振動数) を持つ光子を一つ放射してエネルギーの高い状態から低い状態へと自発的に遷移する過程を考える。原子のスケールに対して十分波長が長い電磁波を考える（双極子近似）と、摂動 H' は A を摂動の振幅に対応する実数の定数として、以下で与えられる。

$$H' = A \exp(i\omega t)\, p_x$$

(a) の結果を使い、$\langle \phi_j | H' | \phi_k \rangle$ を運動量演算子を含まない形に書き換えよ。

(e) 初期に系が状態 $|\Phi_2\rangle$ にある（$c_1(t=0) = 0,\ c_2(t=0) = 1$）とし、$t = 0$ から摂動が与えられたとする。状態間の遷移は比較的ゆっくり起こるとして $c_k(t)$ の時間変化による高次の効果を無視し、式 (1) 右辺の $c_k(t)$ を定数とみなすという近似を行う。$\dfrac{dc_1(t)}{dt}$ を積分して時刻 $t > 0$ における $c_1(t)$ を求めよ。

(f) 時刻 t において系が状態 $|\Phi_1\rangle$ にある確率 $|c_1(t)|^2$ が

$$|c_1(t)|^2 = \frac{4A^2 m_e^2}{\hbar^2} \frac{\Delta E^2}{|\Delta E - E|^2} |\langle \phi_1 | x | \phi_2 \rangle|^2 \sin^2 \left[\frac{(\Delta E - E)}{2\hbar} t \right]$$

となることを示せ。ただし $\Delta E = E_2 - E_1$ である。

(g) 実際にはエネルギー準位は厳密に確定しておらず、狭い幅を持って分布している。そこで、光子のエネルギー E が分布 $\rho(E)$ に従う遷移が可能であると考える。$\rho(E)$ は $E = \Delta E$ の周りに鋭いピークを持つ関数であり、$\displaystyle\int \rho(E) dE = 1$ のように規格化されている。エネルギーについて平均を取ると、系が状態 $|\Phi_1\rangle$ にある確率は

$$|C_1(t)|^2 = \int |c_1(t)|^2 \rho(E) dE = \int \frac{4A^2 m_e^2}{\hbar^2} \frac{\Delta E^2}{|\Delta E - E|^2} |\langle \phi_1 | x | \phi_2 \rangle|^2 \sin^2 \left[\frac{(\Delta E - E)}{2\hbar} t \right] \rho(E) dE$$

となる。ここで、被積分関数中の

$$f(E) = \frac{\sin^2 \left[\frac{(\Delta E - E)}{2\hbar} t \right]}{|\Delta E - E|^2}$$

は $E = \Delta E$ に鋭いピークを持つ関数であり、大きな t に対してはその幅は非常に狭くなり、デルタ関数のように振舞う。

$$\lim_{t \to \infty} f(E) = \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(\Delta E - E)$$

これを用いて遷移確率 $W = \dfrac{d|C_1|^2}{dt}$ を求めよ。A や ρ を残したままで良い。

（※次のページにも問題があるので注意すること）

問 2. 水素原子の電子の軌道は主量子数 n、方位量子数 l、磁気量子数 m の三つの組み合わせで決まる。1s, 2s, 2p 軌道の波動関数 $\phi_{n,l,m}$ は極座標 (r,θ,φ) で規格化定数を含めてそれぞれ次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
\phi_{1,0,0} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\\
\phi_{2,0,0} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\\
\phi_{2,1,0} &= \frac{r}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\cos\theta\\
\phi_{2,1,\pm1} &= \frac{r}{8\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\sin\theta\exp(\pm i\varphi)
\end{aligned}
$$

ただし $a = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5.29\times10^{-9}\,\mathrm{cm}$ はボーア半径である。また、各状態のエネルギーは主量子数 n のみに依存し、

$$
E_{n,l,m} = -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2}\frac{1}{n^2}
$$

で与えられる。

前問で求めた 2 準位間の遷移確率 W から、全ての方向への放射を考慮するとともに放射される光子のエネルギーと整合的になるよう振幅 A を決めることで、最終的な遷移確率を求めることができる。詳細な計算によれば、状態 $|\phi_2\rangle$ から状態 $|\phi_1\rangle$ への単位時間当たりの遷移確率は

$$
\Gamma = \frac{4e^2\Delta E^3}{3\hbar^4c^3}\left[|\langle\phi_1|x|\phi_2\rangle|^2+|\langle\phi_1|y|\phi_2\rangle|^2+|\langle\phi_1|z|\phi_2\rangle|^2\right]
$$

となる。これを用いて水素原子の $n=2$ の状態から $n=1$ の状態への単位時間当たりの自発的遷移確率、つまりライマン α 光子の放出率を求める。

(a) 2p 軌道と 1s 軌道のエネルギー準位差 ΔE を有効数字 2 桁で求めよ。

(b) 2p 軌道には $m=-1,0,1$ のものがあるが、どの m を選んでも同じ遷移確率を与える。その物理的理由を簡潔に説明せよ。

(c) $m=0$ の 2p 軌道から 1s 軌道への単位時間当たりの遷移確率を有効数字 1 桁で求めよ。必要ならば $2^{15}/3^{10}\sim0.55$ であること及び以下の公式を用いて良い。

$$
\int_0^\infty r^n\exp(-\alpha r)dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}
$$

(d) 同様に 2s 軌道から 1s 軌道への単位時間当たりの遷移確率を求めよ。

(e) (c) と (d) の違いの原因を物理的な要請の観点から説明せよ。