物理（１）

問1.　質量m_1とm_2の２つの質点が図１のように水平に置かれたばねの両端につながれている。質点はばねの方向に一次元運動をする。それぞれの質点の水平方向の位置をr_1、r_2とし、ばね定数をk、ばねの自然の長さをℓとする。ばねの質量は無視でき、水平に滑らかに運動できる。

(a) ２つの質点の運動量をそれぞれp_1、p_2とし、この系のハミルトニアン$H(r_1, r_2, p_1, p_2)$を与えられた変数を用いて書け。

(b) ハミルトンの正準方程式を用いて、２つの質点に対する運動方程式を書け。

(c) ２つの質点の重心座標Rと相対座標$r = r_2 - r_1$を導入して、それぞれの座標の時間変化を与える式を示し、さらに一般解$R(t)$と$r(t)$を記せ。

(d) この系の全エネルギーEを、２つの座標$R(t)$、$r(t)$やその時間微分などを用いて記せ。

(e) 次に、２つの質点の相対運動$r(t)$に対して、ばねに沿って伸びる方向に$0 < t < T$の間だけ$F = F_0$の外力を与える。F_0は正の定数である。重心座標は静止し$\dot{R} = 0$とする。

(i) $t = 0$において$r = \ell$、$\dot{r} = 0$として、$0 < t < T$ならびに$t > T$における解$r(t)$を書け。

(ii) 外力による系のエネルギー増加分を与えられた記号を用いて示せ。

問2.　このばねの両端につながれた２つの質点に対して、図２のようにばねに垂直な方向を軸として重心のまわりに回転運動を$t = 0$の瞬間に与える。質点間の相対距離をr、回転方向の角度座標をθとする。ここで、$t = 0$で$r = \ell$、$\dot{r} = 0$、$\theta = 0$、$\dot{\theta} = \Omega$とする。重心座標は静止していて$\dot{R} = 0$とし、ばねはたわまないとする。

(a) 座標r、θやその時間微分などを用いて、２つの質点の運動に対するラグランジアンと運動方程式を書け。

(b) ２つの質点間の最大距離が$r = 2\ell$となる初期角速度Ωを与えられた記号で示せ。

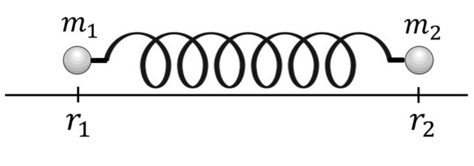

図１

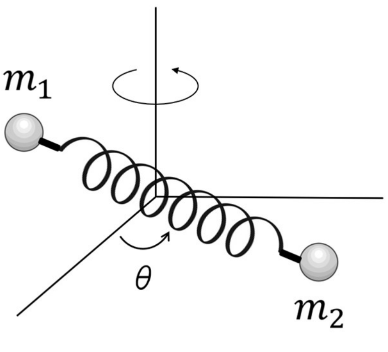

図２

物 理（2）

問 1.　ヘルムホルツ自由エネルギー

$$F = U - TS \tag{1}$$

は

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \tag{2}$$

を満たす熱力学関数である。ここで U、T、S、P、V、μ、N はそれぞれ系の内部エネルギー、温度、エントロピー、圧力、体積、化学ポテンシャル、粒子数である。ボルツマン定数を k とする。

(a)　系の状態方程式として、圧力 P を $F(T,V,N)$ を用いて表せ。
(b)　定積熱容量 C_V を $F(T,V,N)$ を用いて表せ。
(c)　定積熱容量 C_V の体積 V に対する依存性は状態方程式によって定まることを示せ。

以下、定積熱容量が温度のみの関数 $f(T)$ を用いて $C_V = Nf(T)$ で与えられる理想気体を考える。

(d)　ヘルムホルツ自由エネルギー $F(T,V,N)$、エントロピー $S(T,V,N)$、化学ポテンシャル $\mu(T,V,N)$ を求めよ。$\int^T dT' f(T')/T'$ や $\int^T dT' \int^{T'} dT'' f(T'')/T''$ など温度についての積分関数や積分定数は含んでよい。

問 2.　N 個の原子からなる結晶を考える。各原子は磁気モーメント μ を持つ。この結晶に外部磁場 H を加えると、各原子のエネルギー準位が $-\mu H$ と $+\mu H$ に分かれる。以下、外部磁場 H のもとにある温度 T の結晶の性質を調べる。ただし、ボルツマン定数を k とし、原子間の相互作用は無視してよい。

(a)　結晶の分配関数 Z を求めよ。
(b)　結晶の磁気モーメント M とそのゆらぎの標準偏差 σ_M を求めよ。
(c)　結晶の熱容量 C を求め、温度 T の関数として C の概形を図示せよ。
(d)　はじめ温度 T_1、外部磁場 H_1 のもとで平衡にあった結晶を断熱環境に置き、外部磁場を H_2 までゆっくり変化させたところ温度が T_2 になった。T_2 を求めよ。

物 理（3）

問1．真空中 (誘電率 ϵ_0) に N 個の点電荷がある。点電荷の電荷と位置は、それぞれ、q_i、$\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ とする。点電荷の位置は変化しないものとして、以下の設問に答えよ。

(a) N 個の点電荷が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャル Φ を求めよ。

(b) N 個の点電荷から十分遠方での静電ポテンシャル Φ を $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ と $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} q_i \boldsymbol{r}_i$ を用いて表せ。ただし、$(|\boldsymbol{r}_i|/|\boldsymbol{r}|)^3$ より高次の項は無視して良い。

(c) $Q = 0$ の場合に十分遠方での電場 $\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{P}$ を用いて表せ。

(d) **(c)** で求めた電場 $\boldsymbol{E}$ の中で、電気双極子モーメント $\boldsymbol{d}$ を持つ電気双極子を無限遠方から位置 $\boldsymbol{r}$ まで運ぶのに必要な仕事を求めよ。

(e) **(d)** で求めた仕事は、電気双極子モーメント $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{d}$ を持つ、相対座標 $\boldsymbol{r}$ の二つの電気双極子間の相互作用エネルギーと解釈できる。この結果を用いて、二つの電気双極子（電気双極子モーメント $\boldsymbol{d}_1$、$\boldsymbol{d}_2$ を持つ）の最も安定な電気双極子配位を説明せよ。ただし、二つの電気双極子の相対座標は固定されているものとする。

問2．真空中 (透磁率 μ_0) に半径 a、透磁率 μ_1 の磁性体球がある。この磁性体球に時間変化しない一様な外部磁場 $\boldsymbol{H}_0$ を加えた。磁性体球の中心を座標原点、$\boldsymbol{H}_0$ の向きを z 軸の正の方向として、以下の設問に答えよ。

(a) 一様な外部磁場により、磁性体球は一様に磁化する。このとき、磁性体球外部の磁場は原点にある磁気双極子の作る磁場と外部磁場の和として記述される。磁性体球外部の磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{ex}}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ を磁性体球の磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ を用いて表せ。

(b) 磁性体球表面で、磁場 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が満たすべき境界条件を求めよ。

(c) 磁性体球内部では、一様な磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}$、一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}$ を持つ磁場が作られる。磁性体球内部の $\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}$ と $\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}$ を磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ を用いて表せ。

(d) **(a)**、**(c)** で得られた結果で、$|\boldsymbol{H}_0| \ll |\boldsymbol{M}|$ とした場合の $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ のそれぞれについて、$y = 0$ 面 (x-z 平面) 上での力線の概形を図示せよ。

(e) 磁性体球表面には磁化による表面磁化電流が現れる。表面磁化電流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{M}}$ を求めよ。

(f) 磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ を μ_0、μ_1、$\boldsymbol{H}_0$ を用いて表せ。

(g) μ_1 が μ_0 より十分大きい場合の $\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}$、$\boldsymbol{M}$ を求めよ。

物理 (4)

質量 m の自由粒子の波動関数 $\psi(x,t)$ が、以下の 1 次元シュレーディンガー方程式を満たすとする。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{1}$$

ただし h はプランク定数で、$\hbar = h/2\pi$ である。

一般に、ある演算子 $\hat{Q}$ が、波動関数 ψ_1、ψ_2 に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{Q}\psi_1)^*\psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\hat{Q}^\dagger\psi_2 dx \tag{2}$$

を満たすとき、$\hat{Q}^\dagger$ は $\hat{Q}$ のエルミート共役な演算子と呼ばれる。また、$\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$ の時、$\hat{Q}$ はエルミート演算子と呼ばれる。以下、$\langle\hat{Q}\rangle$ は $\hat{Q}$ の期待値を表す。

(a) 物理量を表す演算子はエルミート演算子でなければならないことを示せ。

(b) 任意の演算子 $\hat{Q}$ に対して、$\langle\hat{Q}^\dagger\hat{Q}\rangle \geq 0$ となることを示せ。

(c) 位置の演算子 $\hat{x} = x$ と運動量の演算子 $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ の交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]$ を計算せよ。

　次に、演算子 $\hat{Q}$ に対応する物理量 Q の不確定性 ΔQ を考える。不確定性を表す演算子を $\delta\hat{Q} = \hat{Q} - \langle\hat{Q}\rangle$ と定義すると、不確定性 ΔQ は

$$\Delta Q^2 = \langle(\delta\hat{Q})^2\rangle = \langle\hat{Q}^2\rangle - \langle\hat{Q}\rangle^2 \tag{3}$$

で表すことができる。

(d) ある物理量 A、B に対応する演算子 $\hat{A}$、$\hat{B}$ が、交換関係 $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$ を満たすとする。任意の実数 r を用いて $\hat{P} = \delta\hat{A} + ir\delta\hat{B}$ という演算子を定義し、$\langle\hat{P}^\dagger\hat{P}\rangle$ を計算することで、$\Delta A\Delta B \geq \langle\hat{C}\rangle/2$ となることを示せ。また、位置と運動量の不確定性が満たす不等式を求めよ。

次のページにも問題があるので注意すること

以下では、自由粒子を波束として考える。波動関数は一般的に

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(p,t) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) dp \tag{4}$$

と書ける。このとき $\tilde{\psi}(p,t)$ はフーリエ変換により

$$\tilde{\psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) dx \tag{5}$$

と表すことができ、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(p,t) = \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p,t) \tag{6}$$

を満たす。

$t=0$ における波動関数が、ある運動量 p_0 と正の実数 a を用いて

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(a^2\pi)^{1/4}} \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \tag{7}$$

で表されるとき、以下の問いに答えよ。

ただし、任意の正の実数 α に対して、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ と $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ が成り立つことを使って良い。

(e) $t=0$ における運動量空間での波動関数 $\tilde{\psi}(p,0)$ が以下となることを示せ。

$$\tilde{\psi}(p,0) = \left(\frac{a^2}{\hbar^2\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{a^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2\right] \tag{8}$$

(f) $t=0$ における p 空間の波束の幅 Δp を求めよ (ただし、$\Delta p^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$)。また、運動量空間での確率密度 $|\tilde{\psi}(p,0)|^2$ を運動量の関数として図示せよ。

(g) $t=0$ における x 空間の波束の幅 Δx を求め、$\Delta x \Delta p$ を求めよ (ただし、$\Delta x^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$)。

(h) 運動量空間における波動関数 $\tilde{\psi}(p,t)$ を求めよ。その結果から、p 空間における波束の幅はどのように時間変化するか説明せよ。

(i) ここで、$p_0 = 0$ とする。このとき、波動関数 $\psi(x,t)$ を求めよ。その結果から、x 空間における波束の幅はどのように時間変化するか説明せよ。