物理（1）

重力場（重力加速度g）のなかで、質量mの質点が半径aの円輪上に拘束されて滑らかに運動している。円輪の質量は無視でき、鉛直方向の軸のまわりに倒れることなく滑らかに回転できる（図 1)。図 1 のように質点と鉛直下方がなす角を θ、円輪の回転方向の角をϕとする。

問1.　円輪が外力により鉛直方向の軸のまわりに一定の角速度$\dot{\phi} \equiv d\phi/dt = \omega$で回転している場合について、以下の問に答えよ。

(a) 質点の運動エネルギーTと重力ポテンシャルエネルギーUを書け。

(b) ラグランジアン$L(\theta, \dot{\theta})$を書き、質点の θ 方向の運動方程式を示せ。

(c) θ に共役な一般化運動量をP_θとして、ハミルトニアン$H(\theta, P_\theta) \equiv \dot{\theta} P_\theta - L$ を書き、Hが保存量となることを示せ。

(d) 円輪の回転角速度ωがゼロで、かつ質点が$|\theta| \ll 1$の微小振動をするとき、その角振動数を示せ。

(e) 円輪の回転角速度は再び$\omega > 0$とする。今、$\theta = 0$で $\dot{\theta} = \gamma$ (> 0) の初期条件で質点に運動を与える。質点が$\theta = \pi/2$を通過するためのγに対する必要条件を示せ。

問2.　次に、外力を受けない円輪に対して、最初の瞬間だけ質点とともにその回転方向 ϕ に角速度を与えるものとする。以下の問に答えよ。

(a) 質点の ϕ 方向の運動に対応する一般化運動量P_ϕを書き、P_ϕが保存量となることを示せ。また、θ 方向の運動方程式を示せ。

(b) 質点のハミルトニアン$H(\theta, \phi, P_\theta, P_\phi)$を書き、$H$が保存量となることを示せ。

(c) 今、$\theta = \pi/2$で $\dot{\theta} = 0$と$\dot{\phi} = \Omega(> 0)$の初期条件で質点に運動を与える。この後質点は円輪上を運動するが、ある$\theta = \theta_{min}(> 0)$が θ 方向の運動範囲の下限となる。この位置θ_{min}を与える式を示せ。また、質点が$\theta = 0$を通らない理由を記せ。

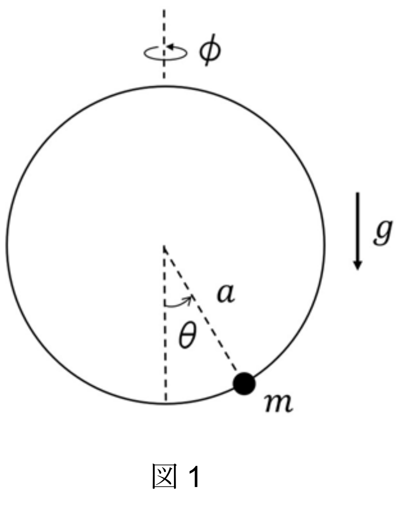

図 1

物 理（2）

問 1.

(a) 一般に、ある熱力学系の温度 T、体積 V、圧力 p、エントロピー S、内部エネルギー U の間に以下の関係式、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

および

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

が成り立つことを示せ。

次に内部エネルギー密度 $u(\equiv U/V)$ が温度のみに依存し、圧力 p との間に $u = 3p$ という関係を満たす気体を考える。

(b) u を温度の関数として表せ。ただし任意定数を残してもよい。

(c) エントロピー S を温度 T、体積 V の関数として求めよ。また体積 V_0, 圧力 p_0 の状態から断熱準静的に体積 V_1 まで膨張した際の圧力の値 p_1 を求めよ。

問 2. エネルギー準位が $\epsilon = (n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2})\epsilon_0$ で与えられる 3 次元振動子を考える。ただし x, y, z 方向の振動の量子数 n_x, n_y, n_z はそれぞれ負でない整数 $(= 0, 1, 2, ...)$ であり、ϵ_0 はある正の定数である。

(a) 温度が T のとき、この振動子一つの分配関数 z_{s} を求めよ。

(b) 互いに独立に運動する N 個のこのような（互いに区別できる）振動子からなる固体を考える。内部エネルギー U および熱容量 C を求め、その概形を温度の関数として図示せよ。

※次のページにも問題があるので注意すること

次に質量 m の内部自由度のない単原子分子からなる理想気体を考える。

(c) N 個の分子からなる気体の体積が V、温度が T のとき分配関数が

$$Z_{\mathrm{g}} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3N/2}$$

と与えられることを示せ。ただし h はプランク定数、k はボルツマン定数である。

[ヒント：気体分子のド・ブロイ波が定在波となる条件から、一分子のエネルギー準位が $\epsilon = \frac{h^2}{8mV^{2/3}}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$　(ここで n_x, n_y, n_z は負でない整数。ただし $n_x = n_y = n_z = 0$ の場合を除く) と与えられることを用いてもよい。また公式 $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$（ここで a は正の定数）を用いてもよい。]

この分子からなる (b) で考えたような固体を考える。初め N 個の分子からなる固体を体積 V の真空の箱の中に入れたところ、分子の一部が昇華して気体となった。なお固体中の分子を気体中に取り出すには一つ当たり ϕ のエネルギーが必要であり、エネルギーの原点を気体中の静止した分子に取ったとき、固体中の分子一つの分配関数 z'_{s} は (a) で求めた分配関数 z_{s} を用いて $z'_{\mathrm{s}} = e^{\phi/kT}z_{\mathrm{s}}$ と表すことができるとする。また固体の占める体積は V に比べて十分小さく無視できるものとせよ。

(d) 気体中に N_{g} 個、固体中に $N - N_{\mathrm{g}}$ 個の分子がある時、この系全体の分配関数 Z を求めよ。

(e) 十分時間が経ったのち、気体および固体中の分子は平衡となった。この時の気体中の圧力を求めよ。

[ヒント：大きい数 N に対してのスターリングの公式 $\log N! = N\log N - N$ を用いてもよい。]

物理（3）

ここでは、MKSA 単位系を採用し、真空の透磁率を μ_0 とする。

問 1.

(a) 半径 a の円形コイルに図 1a に示したように定常電流 I が流れている。コイルの中心を座標原点にとり、中心軸を z 軸にとる。z 軸上の点 P における磁場の x, y 成分がゼロで、z 成分が以下のように与えられることを示せ。

$$B(P) \quad = \quad \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}} \tag{1}$$

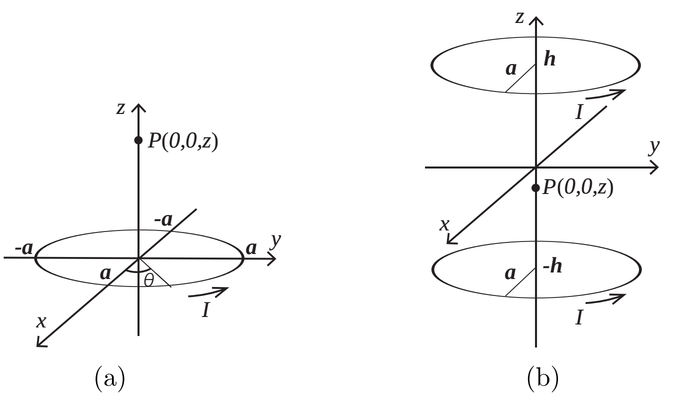

図 1

(b) 次に図 1b のように半径 a の円形コイルを中心軸を揃えて対面させる。二つのコイルそれぞれに同じ向きに同じ大きさの定常電流 I を流す。二つのコイルの中心座標が $(0, 0, -h)$、$(0, 0, h)$ となるように設置する。z 軸上の磁場を $z = 0$ のまわりでテイラー展開した時、ゼロで無い項が z の 4 次から始まる（z の 1 次、2 次、3 次がゼロになる）ために要求される h の満たすべき条件を求めよ。結果だけでなく計算あるいは考察の過程も示せ。

問 2.

z 軸正の方向を向いた軸対称分布を持つ磁場中の電子の運動を考察する。図 2 にこの系の yz 平面内の断面図を示した。磁場の強度の空間分布は動径座標 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数である。さらに磁場の大きさは時間 t に比例して増幅し、正の関数 $b(r)$ を用いて、$B(r, t) = b(r)t$ と表される。ここで 、$t > 0$ とする。電子の電荷は $-e$ とせよ。ここで電磁気力以外の外力は存在しない。

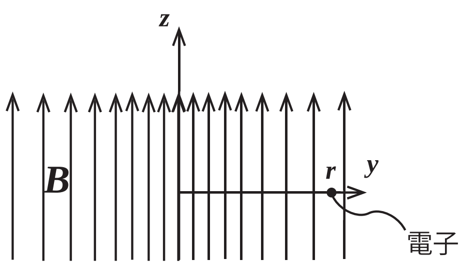

図 2

※次のページにも問題があるので注意すること

(a) 電子が原点を中心とした半径 r の円軌道を描いて xy 平面内で運動している。この円軌道で囲まれる面内に含まれる磁束を $\Phi(r,t)$ とする。時刻 t における電子に働く誘導電場の大きさ $E(r,t)$ を $\Phi(r,t)$ を用いて表せ。さらに電子が図 2 のように y 軸上に存在する時、電子に働く誘導電場の向きを答えよ。

(b) 電子が一定の半径 r の円軌道を保って運動しつづけている。この時、電子に働く磁場の大きさ $B(r,t)$ と磁束 $\Phi(r,t)$ の間の関係式を求めよ。結果だけでなく計算の過程も示せ。

問 3.

図 3 に示したように領域 B に定常電流が存在する。ここで領域 B 内の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ とし、その点の電流密度を $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ とする。この電流が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場は、以下の式で与えられる。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \quad = \quad \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d^3r' \tag{2}$$

右辺の積分は、領域 B 内の体積積分である。以下の問に答えよ。

(a) 次の関係式を示せ。ここで $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ および $\boldsymbol{\nabla}' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$ はそれぞれ $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{r}'$ に作用する。

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \quad = \quad -\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3}$$

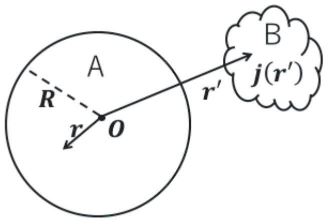

図 3: 電流は雲状の領域 B 内にのみ存在する

(b) 図 3 のように領域 B が全て積分領域 A の外にある場合を考える。この時、原点 O を中心とした半径 R の球面で囲まれた領域 A 内部における磁場の体積積分が以下の式で表されることを示せ。計算には式 (3) を活用するとよい。

$$\int_A \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) d^3r \quad = \quad \frac{4\pi}{3}R^3\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0})$$

ここで左辺の積分は、領域 A 内での体積積分である。また、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0})$ は、$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ すなわち原点 O における磁場である。

物 理（4）

質量 m、エネルギー E をもつ粒子の量子力学的な定常状態を、1 次元シュレーディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{1}$$

を用いて考える。ここで、 $\hbar = h/(2\pi)$ で h はプランク定数である。

問 1. ポテンシャル V が、ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて

$$V(x) = -U_0\,\delta(x) \tag{2}$$

と与えられている。ここで U_0 は正の定数である。以下に答えよ。

(a) 波動関数 $\psi(x)$ の導関数は $x=0$ で次の不連続を持つことを示せ。

$$\frac{d\psi}{dx}(\epsilon)-\frac{d\psi}{dx}(-\epsilon) = -\frac{2m}{\hbar^2}U_0\,\psi(0) \tag{3}$$

ここで ϵ は正の微小量である。

(b) 粒子が負のエネルギー E の束縛状態にあるとする。このとき、可能なエネルギー E と対応する波動関数 $\psi(x)$ をすべて求めよ。波動関数の規格化は行わなくてもよい。

問 2. 次に、(2) 式のポテンシャルが間隔 a で周期的に無限に並んでいる場合を考える。このときポテンシャルは

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-U_0\,\delta(x-na)\right] \tag{4}$$

となる。ここで n は整数で、U_0 は正で有限な実数とする。ここでは正のエネルギー E をもつ粒子を考える。$x = na$ (n は任意の整数) 以外では $V=0$ であるので，波動関数は $\sin(kx)$ と $\cos(kx)$ の一次結合で書くことができる。波数 k は正の実数とする。また $x = na$ で、ψ の導関数は (3) 式のような不連続をもつ。区間 $-a < x \le a$ に対して、この不連続を考慮するため、独立な解 y_1、y_2 として

$$y_1(x) = \begin{cases} \cos(kx+C) & (0 < x \le a) \\ \cos(kx-C) & (-a < x \le 0), \end{cases} \tag{5}$$

$$y_2(x) = \sin(kx) \tag{6}$$

を採用し、波動関数を $\psi(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$ という一次結合で表す。ここで、位相 C は $-\pi/2 \le C \le \pi/2$ の範囲の実数で、(3) 式を満たすように決められる。以下に答えよ。

(a) 波数 k をエネルギー E の関数として表せ。また、関係式 $\tan C = \dfrac{mU_0}{\hbar^2 k}$ を導け。

※次のページにも問題があるので注意すること

(b) 周期 a のポテンシャルの中を運動する粒子の波動関数は、条件式

$$\psi(x+a) = \exp(iKa)\,\psi(x) \tag{7}$$

を満たすことが知られている。ここで K は正の実数である。条件式 (7) から波動関数 $\psi(x)$ の係数 A、B が満たすべき 1 次方程式を 2 つ求めよ。さらに、得られた連立 1 次方程式が $A = B = 0$ という自明な解以外の解をもつためには、次の k と K の関係式が成り立つ必要があることを示せ。

$$\cos(Ka) = \cos[\,ka + C(k)\,]/\cos C(k) \tag{8}$$

(c) (8) 式を満たす K が存在するためには、(8) 式右辺の絶対値が 1 以下という不等式が成り立つことが必要である。k はエネルギー E の関数であるので、この不等式は粒子が取りうるエネルギーに制限を与える。粒子が比較的大きなエネルギー E をもち、$ka > 1$ である場合を考える。さらに、U_0 は十分小さく、$C \ll 1$ であるとする。このとき、エネルギー E の増加とともに、粒子が存在できる連続的なエネルギー領域（エネルギーバンド）と粒子が取ることのできないエネルギー領域（禁制帯）が交互にいくつも現れること示せ。

(d) (c) と同様に $ka > 1$、かつ、U_0 が十分小さい場合において、各禁制帯の上限のエネルギーと各禁制帯のエネルギー幅を、U_0 について 1 次までの精度で求めよ。