物 理（1）

問 1. ポテンシャルエネルギー U が座標原点からの距離 r のみに依存する中心力場において、質量 m の粒子がどのような運動をするかを考える。粒子の位置ベクトルと運動量ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ とする。以下の問に答えよ。

(a) このような中心力場における粒子の運動は、ある平面内に限られることを示せ。

(b) この平面に平面極座標 (r, θ) を導入し、粒子の運動のラグランジアン $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を書け。

(c) r と θ それぞれの座標に共役な運動量 p_r と p_θ を求め、粒子の運動のハミルトニアン $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$ を与えられた記号で表せ。

(d) ハミルトンの正準方程式を用いて、粒子の運動方程式を r と θ それぞれの座標に対して書け。また、p_θ が保存されることを示せ。

問 2. 次に、ポテンシャルエネルギー $U(r)$ は以下の形で与えられるとする。k は正の定数である。これは、半径 a の一様密度球が内外に作る重力場に対応している。このような系における質量 m の粒子の運動に関して以下の問に答えよ。

$$U(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}kr^2 - \dfrac{3}{2}ka^2 & (r \leq a \text{ のとき}) \\ -k\dfrac{a^3}{r} & (r > a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(a) 粒子がある半径 $r = r_\mathrm{c}$ にて円運動を行なっているとき、その θ 方向の角速度 $\omega = d\theta/dt$ を、$r \leq a$、$r > a$ それぞれの範囲において求めよ。さらに、円運動の速度の r_c 依存性を図示せよ。

(b) 粒子の運動が円運動からわずかにずれているときの r 方向の微小振動の角振動数を、$r \leq a$、$r > a$ それぞれの範囲における ω を用いて表せ。なお、粒子の運動は $r = a$ を横切らず、$r \leq a$ または $r > a$ のいずれかに限られるとする。

以下の問では、粒子の運動が $r > a$ に限られるとする。

(c) 角運動量 p_θ、全エネルギー E をもつ束縛された粒子の一般の運動を考える。粒子の動径方向の運動範囲 $r_\mathrm{min} \leq r \leq r_\mathrm{max}$ における r_min と r_max を求めよ。

(d) 今、粒子が半径 $r_\mathrm{c}(> a)$ 上を円運動をしている間に、k が突然 $k'(< k)$ に減少したとする。この粒子が系に束縛され続けるために必要な k' に対する条件を求めよ。

物 理（2）

問 1. ゴム紐を引っ張ったところ、その伸び x は引っ張る力 f に比例した。すなわち比例係数を k として、$f = kx$ と書ける。また、この比例係数 k はゴム紐の（絶対）温度 T に比例し、正の定数 a を用いて、$k = aT$ と表すことができるとする。

(a) 一般に、熱力学系のヘルムホルツ自由エネルギー F は系の内部エネルギー U と温度 T、エントロピー S を用いて $F = U - TS$ と表すことができる。この紐について、温度 T と伸び x の変化量がそれぞれ dT、 dx であるとき、ヘルムホルツ自由エネルギー F の変化量 dF を dT、dx を用いた全微分形式で与えよ。ただし紐のエントロピーを S とする。

(b) 紐の内部エネルギー U は温度のみの関数で、伸びに依存しないことを示せ。

(c) 紐が伸びていない状態から、伸びが x になるまで断熱的にゆっくりと引っ張ったところ、温度が上昇した。このときの温度の変化量を求めよ。ただし、紐の長さを一定に保つときの熱容量 C_x は温度に比例し、伸びによらず定数 b を用いて $C_x = bT$ と書けるものとする。

問 2. z 方向の磁気モーメントが $\mu_z = \pm\mu$ の 2 つの状態を取ることができる粒子からなる磁性体を考える。磁性体には粒子が n 個含まれ、これらは互いに区別できるものとする。また、磁性体は温度 T の熱平衡状態にあるとし、温度や磁場の変化の際にその体積は変化しないものとする。以下の問に答えよ。なお、ボルツマン定数を k_{B} とする。

最初に、粒子間に相互作用がない場合を考える。外部から z 方向に磁場 H をかけた際の一粒子のエネルギーは $\epsilon = -\mu_z H$ とする。

(a) この磁性体の分配関数 Z を求めよ。

(b) この磁性体の熱容量 C および磁化率 χ を求めよ。ただし磁化率は磁性体の磁気モーメント M を用いて、$\chi = (\partial M/\partial H)_T$ で与えられるものとする。

次に他の粒子との相互作用により、一粒子のエネルギーが $\epsilon = -\mu_z H - J\mu_z\overline{\mu}_z$ となる場合を考える。ここで J は正の定数、$\overline{\mu}_z$ は μ_z の平均値である。

(c) 十分高温における磁化率 χ を求めよ。

[ヒント：まず温度 T の熱平衡時における μ_z の期待値（平均値）$\overline{\mu}_z$ を与える式を書いてみるとよい。]

物 理（3）

問. 電磁気現象は次のマクスウェル方程式によって記述される。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_e\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i}_e$$

ここで、ρ_e は真電荷の電荷密度であり、$\boldsymbol{i}_e$ は伝導電流密度である。また、$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ の関係が成立しているものとする。ここで、ϵ、μ は、それぞれ、誘電率、透磁率である。真空の誘電率、透磁率は、それぞれ、ϵ_0、μ_0 とする。また、光速度は c とする。

(a) マクスウェル方程式を用いて、次の関係式が満たされることを示せ。

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}_e = 0$$

また、この関係式の物理的な意味を説明せよ。

(b) $\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式を導け。ただし、誘電率 ϵ と透磁率 μ は定数とする。必要なら、任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対する次の公式を用いても良い。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} - \Delta \boldsymbol{V}$$

(c) 3 次元空間において $x < 0$ の真空領域から $x > 0$ の物質領域に向かって境界面に垂直に平面電磁波を入射させた。物質中ではオームの法則 $\boldsymbol{i}_e = \sigma \boldsymbol{E}$ が成り立つものとする。ここで、σ は物質の電気伝導率で定数とする。物質の誘電率は ϵ (定数)、透磁率は μ_0 とする。

(i) 物質中で $\boldsymbol{E}$ が満たす波動方程式を導け。ただし、物質中では $\rho_e = 0$ とする。

(ii) $x < 0$ の領域では、$\boldsymbol{E}$ は次のように与えられるものとする。

$$E_z = A\,e^{ik_0 x - i\omega t} + R\,e^{-ik_0 x - i\omega t}\,, \quad E_x = 0\,, \quad E_y = 0$$

ここで、k_0、ω は、それぞれ、波数、振動数で、正の定数である。また、A, R は複素定数である。$\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ を用いて、k_0 と ω の関係（分散関係）を導け。

(iii) $x < 0$ の領域での $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

(iv) $x > 0$ の領域では、$\boldsymbol{E}$ は次のように与えられる。

$$E_z = T\,e^{ikx - i\omega t}\,, \quad E_x = 0\,, \quad E_y = 0$$

ここで、k、T は複素定数である。波数 k と 振動数 ω の関係（分散関係）を導け。

(v) (iv) で導いた分散関係を解いて、波数 k の実部と虚部を求めよ。ただし、実数部分は正とせよ。

(vi) 電気伝導性が十分に良く $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$ が成り立つときの $\boldsymbol{E}$ を求め、電磁波が物質中に侵入できる実効的な厚さ δ を求めよ。ここで、振幅が e^{-1} となる距離を実効的な厚さとする。

(vii) 電磁波の反射率 r を k_0 と k を用いて表せ。ただし、物質表面に表面電流はないものとする。ここで、$r = \left|\dfrac{R}{A}\right|^2$ である。

(viii) $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$ が成り立つときの反射率 r を k_0 と δ を用いて表せ。また、完全導体のときに完全反射することを示せ。

物 理（4）

二原子分子の回転について量子力学を用いて考える。質量の無視できる剛体棒で接続した二つの質点が重心周りで自由回転するという簡単なモデルを用いる。h はプランク定数であり、ディラック定数を $\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ と定義する。

問 1. 古典力学では二原子分子が角運動量 $\boldsymbol{L}$ を持って回転している時、その回転エネルギーは二原子分子の慣性モーメントを I として $E = \dfrac{\boldsymbol{L}^2}{2I}$ である。古典力学と量子力学の対応から、回転運動のハミルトニアンは $\hat{H} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2I}$ と書ける。$\hat{\boldsymbol{L}} \equiv \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ は角運動量演算子であり、二原子間の相対座標の演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}$ と運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ はデカルト座標でそれぞれ $\hat{\boldsymbol{r}} \equiv (x, y, z)$、$\hat{\boldsymbol{p}} \equiv \left(\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ と表される。以下の問に答えよ。デカルト座標と極座標の間の以下の関係を用いて良い：

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \sin\theta\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\sin\phi}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{pmatrix}.
$$

(a) 交換関係 $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ 及び $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_z]$ を $\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$、$\hat{L}_z$ を用いて表せ。

(b) (a) の交換関係から、エネルギーと角運動量各成分の固有状態の間、及び角運動量各成分の固有状態の間にどのような物理的関係があるか、100 字以内で説明せよ。

(c) $\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$、$\hat{L}_z$ を r、θ、ϕ を用いて表せ。

(d) ハミルトニアン $\hat{H}$ が

$$
\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2I}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]
$$

と書けることを示せ。

(e) 時間に依存しないシュレディンガー方程式 $\hat{H}\psi = E\psi$ から、量子化された回転のエネルギー準位を求めよ。ただし、球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ について

$$
\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] Y_{l,m}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\phi)
$$

（l はゼロ以上の整数）という関係を用いて良い。

(f) 量子化された回転エネルギー準位間で一個の光子を放射または吸収する過程では $l \to l \pm 1$ の遷移のみ許される。1 以上の l に対し、l から $l-1$ の準位に遷移する時に放出される光子のエネルギー ΔE_l を I と l 及び必要な物理定数を用いて表せ。

（次ページに続き有り）

問 2. 二原子分子の慣性モーメント I は二原子の換算質量 μ と原子間距離 R を用いて $I = \mu R^2$ と書ける。ここで換算質量とは、二つの質点の運動を重心運動とそのまわりの相対運動に分離した時の、相対運動の実効的な質量である。

表 1 の二原子分子のうちいずれか一種類の気体が入った容器がある。この中身を推定するために、気体から放射される分子の回転遷移輝線を分光したところ、図 1 のようなスペクトルが得られた。中身の気体が表 1 のいずれの分子であるかを決定し、その判断の理由を説明せよ。なお、最も低いエネルギーの輝線も十分検出されているものとする。必要に応じて以下の定数を用いて良い：プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s、原子質量単位 $m_u = 1.7 \times 10^{-27}$ kg。

表 1

分子	原子 1 の質量 m_1	原子 2 の質量 m_2	原子間距離 R [m]
LiH	$7\ m_u$	$1\ m_u$	1.6×10^{-10}
CO	$12\ m_u$	$16\ m_u$	1.1×10^{-10}
CS	$12\ m_u$	$32\ m_u$	1.5×10^{-10}
NaCl	$23\ m_u$	$35\ m_u$	2.4×10^{-10}

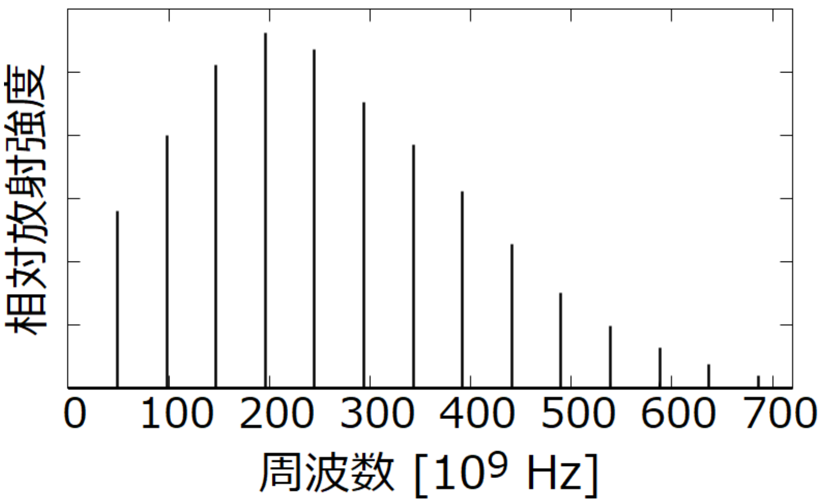

図 1