物理 (1)

問. 下図のように、質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2 がそれぞれ長さ l の糸でつながれている。点 O で糸は固定されており、質点の運動は紙面の平面内に限られるとする。図中に示したように角度 θ_1 と θ_2 をとるとき、この系の運動に関する以下の問いに答えよ。ただし、鉛直下方に重力加速度 g が作用しているものとし、運動によって糸はたるまないものとする。

(a) 与えられた変数を用いて、この系の運動エネルギー T、位置エネルギー U とラグランジアン L を書け。

以下、$|\theta_1| \ll 1$、$|\theta_2| \ll 1$ とする。

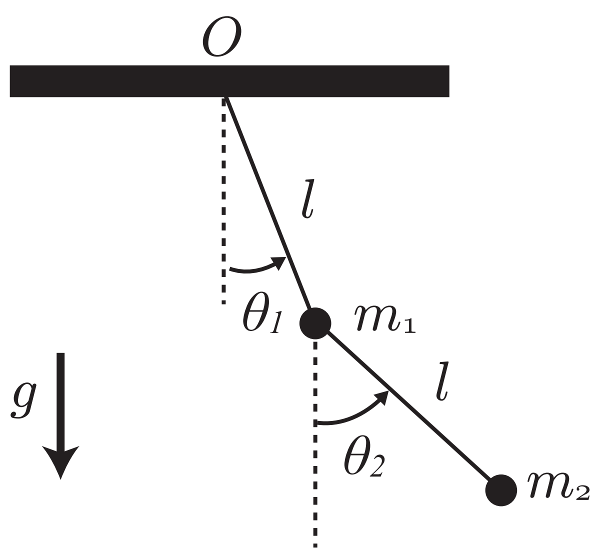
(b) オイラー・ラグランジュ方程式を用いて、θ_1 と θ_2 の満たす線形微分方程式を求めよ。

(c) 質点 1、2 の質量比を $\mu = m_2/m_1$ とするとき、この系の固有振動数を求めよ。

(d) **(c)** で求めた固有振動数の $\mu \ll 1$ と $\mu \gg 1$ における極限値をそれぞれ求め、どうしてそのような値をとるのかを物理的に説明せよ。

(e) 固有振動数を μ の関係として図示せよ。

(f) $\mu = 1$ のとき、各固有モードにおける質点 1、2 の運動の振幅の比を求め、各固有モードの振動の様子を図示せよ。



図

物理（２）

問１．ファン・デル・ワールスの状態方程式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \mathcal{R}T$$

に従う１モルの気体を考える。p、V、T はそれぞれ気体の圧力、体積、（絶対）温度であり、$\mathcal{R}$ は気体定数である。また a と b は正の定数である。以下の問いに答えよ。

(1) $(\partial T/\partial V)_E$ を、p、T、c_V、$(\partial p/\partial T)_V$ を用いて表せ。ここで、E は気体の内部エネルギー、c_V は定積モル比熱である。

(2) 内部エネルギー E を温度 T と体積 V の関数とするとき、内部エネルギー $E(T,V)$ を c_V と積分定数 C を含む形で表せ。ここで、c_V は温度 T に依存しないとする。

(3) この気体を真空中へ断熱的に自由膨張させ、体積を V_1 から V_2 にした。それに伴い気体の温度は T_1 から T_2 に変化した。温度の差 $\Delta T = T_2 - T_1$ を求めよ。

(4) 温度 T と体積 V の関数としてエントロピー $S(T,V)$ を求めよ。また、体積 V_1 から V_2 への断熱的自由膨張に伴いエントロピーが S_1 から S_2 に変化した。$\Delta S = S_2 - S_1$ を求めよ。

(5) 理想気体の断熱的自由膨張におけるエントロピーの変化 ΔS を求め、その正負を理由も含めて論ぜよ。

問２．温度 T の熱浴と熱的・拡散的に接している粒子系の大きな分配関数 $\mathcal{Z}$ を

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\cdots=N} \exp\left[\sum_j \beta\,(\mu - \epsilon_j)\,n_j\right]$$

で定義する。N は系に含まれる粒子数、n_j はエネルギー準位 ϵ_j を占める粒子の数、μ は粒子の化学ポテンシャル、$\beta = 1/k_BT$、k_B はボルツマン定数である。

いま系が二つのエネルギー準位 ϵ_1 と ϵ_2 のみ持っているものとし、また n_1 と n_2 は 0 か 1 の値のみを取るとして以下の問いに答えよ。

(1) エネルギー準位 ϵ_1 と ϵ_2 とも空になっているか、あるいは、どちらかの準位のみが 1 個の粒子によって占められているものとするとき
  (a) 大きな分配関数 $\mathcal{Z}$ を求めよ。
  (b) 系を占めている粒子の数の平均値 $\bar{N}$ を求めよ。
  (c) エネルギー準位 ϵ_1 を占めている粒子の数の平均値 $\bar{n}(\epsilon_1)$ を求めよ。

(2) エネルギー準位 ϵ_1 と ϵ_2 とも空になっているか、どちらかの準位のみが 1 個の粒子によって占められているか、あるいは、二つの準位ともそれぞれ 1 個の粒子によって占められているものとするとき、
  (a) 大きな分配関数 $\mathcal{Z}$ を求めよ。
  (b) エネルギー準位 ϵ_1 を占める粒子の数の平均値 $\bar{n}(\epsilon_1)$ を求めよ。
  (c) $\beta\mu \gg 1$ のとき、$\bar{n}(\epsilon_1)$ は ϵ_1 の関数としてどのように振る舞うか、その概略図をかけ。
  (d) $\beta\mu \gg 1$ のとき、系を占めている粒子の数の平均値 $\bar{N}$ を、(i) $\epsilon_1 < \mu$ かつ $\epsilon_2 < \mu$、(ii) $\epsilon_1 < \mu$ かつ $\epsilon_2 > \mu$、(iii) $\epsilon_1 > \mu$ かつ $\epsilon_2 > \mu$ の三つの場合についてそれぞれ求めよ。

物 理（3）

問１．$z \leq 0$ の領域に誘電率 ϵ の誘電体がある。$z > 0$ の領域は真空で、真空の誘電率は ϵ_0 とする。誘電体の表面から高さ d の z 軸上の点 (座標 $(0, 0, d)$, $d > 0$) を点 P とする。

(a) 点 P に電荷 q を持つ点電荷を置いた。誘電体内外の静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ を求めよ。

(b) 点電荷に働く力の大きさと向きを求めよ。

(c) 誘電体表面に現れた分極電荷の電荷面密度 σ と分極電荷の総和を求めよ。

(d) 点電荷の代わりに点 P に電気双極子モーメント $\mathbf{p} = p\,(\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_z)$ を持つ電気双極子を置いた。ここで、$\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_z$ は、それぞれ、x 方向、z 方向の基底ベクトルであり、θ は z 軸と $\mathbf{p}$ のなす角である。電気双極子に働くトルクを求めよ。

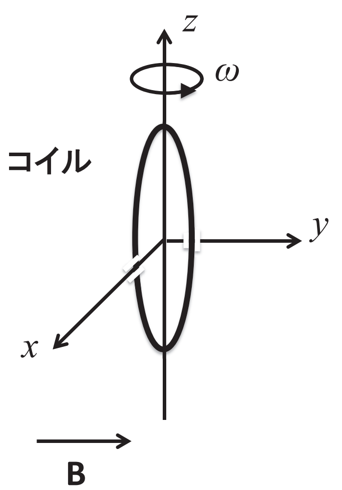
問２．y 方向を向いた一様な磁場 $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_y$ の中で、座標原点を中心とした半径 a の円形コイルを z 軸を軸として反時計周りに一定の角速度 ω で回転させた。ここで、$\mathbf{e}_y$ は y 方向の基底ベクトルである。時刻 $t = 0$ で円形コイルは xz 平面上にあるものとする。(図 1 参照) ただし、一様な磁場 $\mathbf{B}$ は変化せず、コイルの作る磁場は無視できるものとする。真空の透磁率は μ_0 とする。

(a) コイルに生じる誘導起電力を求めよ。

(b) コイルの抵抗を R とするとき、ジュール熱によるエネルギー損失率を求めよ。

(c) コイルの回転角速度 ω を一定に保つために必要なトルクを求めよ。

(d) **(c)** で求めたトルクによる仕事率を求めよ。また、**(b)** で求めたジュール熱によるエネルギー損失率と比較し、物理的に何が言えるか答えよ。



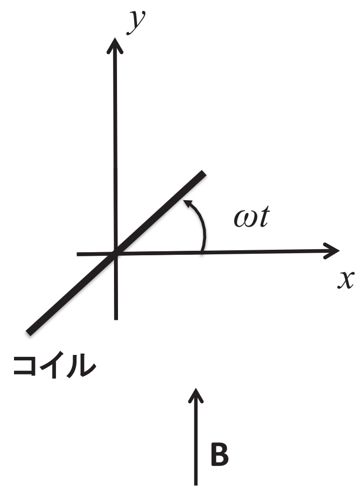


図 1 : 俯瞰図 (左)、z 軸正の方向から見た図 (右)

物理（４）

問. 質量 m の粒子の波動関数 $\psi(x,t)$ が、以下の１次元シュレーディンガー方程式を満たすものとする。

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{m}\Lambda\delta(x)\right)\psi(x,t) \tag{1}$$

ここで h はプランク定数で $\hbar = h/2\pi$、$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、Λ は定数である。

(1) $\psi(x,t) = e^{-i\omega t}\phi(x)$ として $\phi(x)$ が以下の条件を満たすことを示せ。

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{d\phi(+\epsilon)}{dx}-\frac{d\phi(-\epsilon)}{dx}\right] = 2\Lambda\phi(0) \tag{2}$$

ここで ϵ は正の量とする。

(2) ここでは、$\Lambda > 0$ とする。波数 k の自由粒子が x の負の領域から正の方向に入射した。この粒子のポテンシャルによる原点での散乱を考える。

(a) 入射波の波動関数 $\psi(x,t)$ を求めよ。波動関数の振幅は１とせよ。答えは k を用いた形で表せ。また k と ω の関係式を答えよ。

(b) 散乱波解を求めよ。ただし、解は次で定義される θ を用いてまとめよ。

$$\cos\theta = \frac{\Lambda}{\sqrt{k^2+\Lambda^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{k}{\sqrt{k^2+\Lambda^2}}$$

(c) 反射率および透過率を求めよ。

(d) 図１は、ある時刻における入射波の波動関数の実部を示している。$\Lambda = k$ とし、反射波と透過波の波動関数の実部の概略図を描け。解答欄にこの図を写して描きその中に答えを描け。

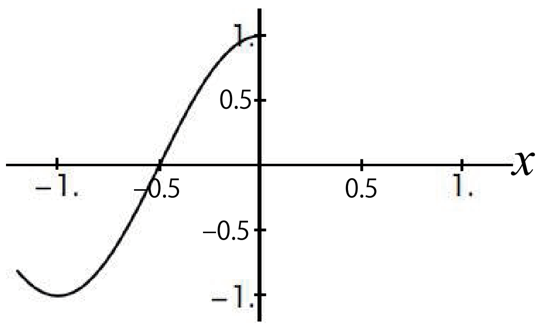


図 1:

(e) $\Lambda \gg k$ の極限で $t=0, x=0$ での反射波の位相を k/Λ の一次までで求めよ。

(3) 次に、$\Lambda < 0$ とする。束縛状態を表す規格化された状態関数 $\phi(x)$ とそのエネルギー固有値を求めよ。